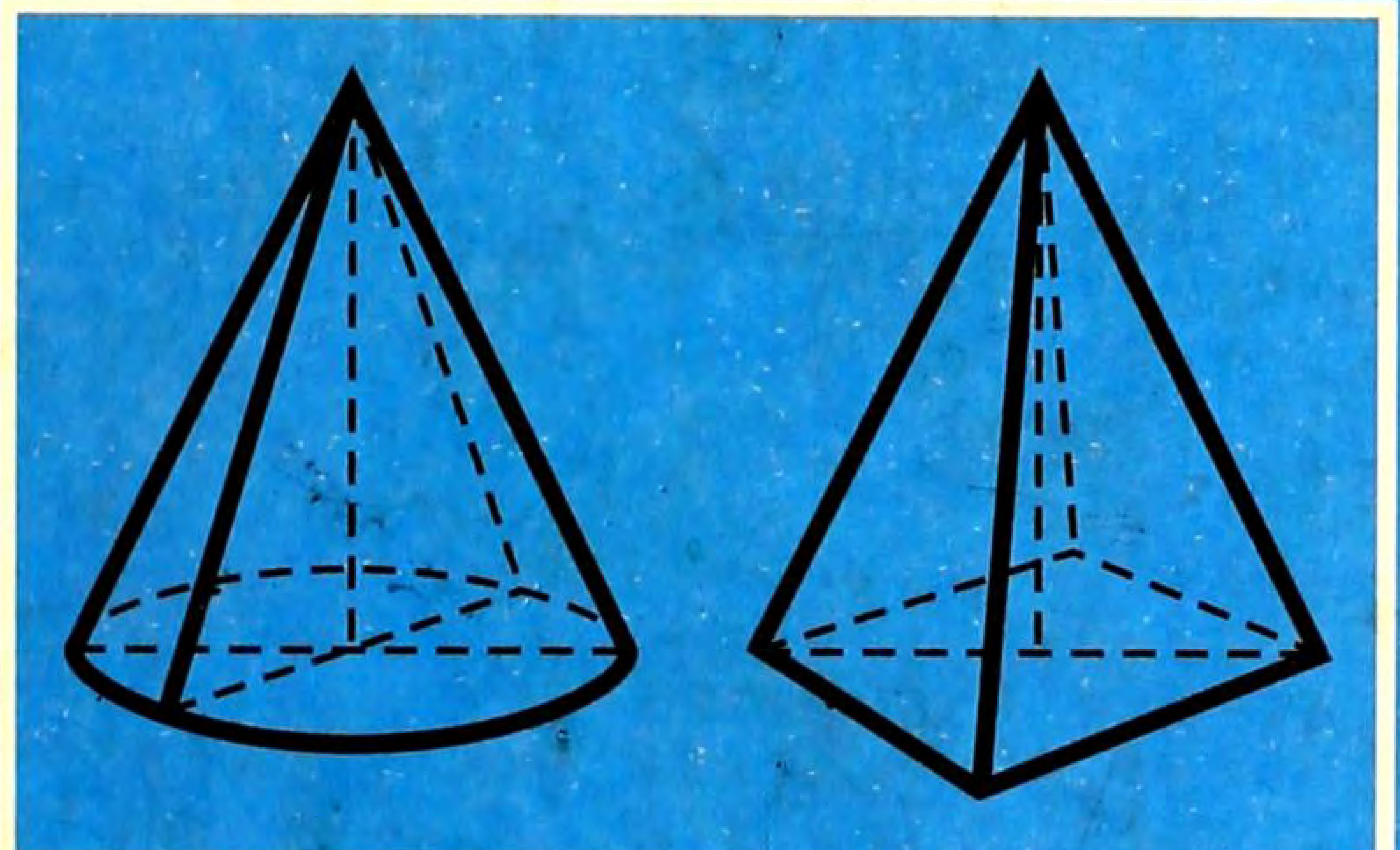
И. Б. Бекбоев
А. А. Бөрүбаев
А. А. Айылчиев

ГЕОМЕТРИЯ



7-9

Кыргыз Республикасынын Герби

Кыргыз Республикасынын Желеги

Кыргыз Республикасынын Мамлекеттик Гимни

Сөзү: Ж.Садыков, Ш.Кулуевдики.
Обону: Н.Давлесов, К.Молдобасановдуку

Ак мөңгүлүү аска-зоолор, талаалар,
Элибиздин жаны менен барабар.
Сансыз кылым Ала-Тоосун мекендеп,
Сактап келди биздин ата-бабалар.

Кайырма:
Алгалай бер кыргыз эл,
Азаттыктын жолунда.
Өркүндөй бер, өсө бер.
Өз тагдырың колуңда.

Байыртадан бүткөн мүнөз элиме,
Досторуна даяр дилин берүүгө.
Бул ынтымак эл бирдигин ширетип,
Бейкуттукту берет кыргыз жерине.

Кайырма:

Аткарылып элдин үмүт-тилеги,
Желбиреди эркиндиктин желеги.
Бизге жеткен ата салтын, мурасын,
Ыйык сактап, урпактарга берели.

Кайырма:

I глава ГЕОМЕТРИЯЛЫК АЛГАЧКЫ ТҮШҮНҮКТӨР

§ 1. ЧЕКИТ, ТҮЗ СЫЗЫК, ТЕГИЗДИК

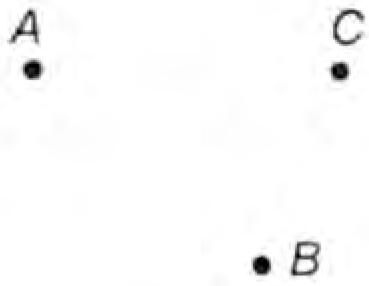
1.1. ТҮЗ СЫЗЫК ЖАНА ЧЕКИТ. НЕГИЗГИ ТҮШҮНҮКТӨР

Геометрияда фигураларды жана алардын касиеттерин окуп-үйрөнүүдө улам жаңы түшүнүктөр, терминдер менен таанышууга туура келет. Ал жаңы түшүнүктөрдүн, терминдердин мааниси жана баяндалышы мурда белгилүү болгон түшүнүктөр аркылуу берилет. Натыйжада жаңы түшүнүктүн маанисин ачып көрсөтүүчү сүйлөмдү колдонуу зарылчылыгы келип чыгат. Андай сүйлөмдү аныктама деп аташат. Адатта жаңы түшүнүккө аныктама бергенде мурда аныкталган түшүнүктөрдөн пайдаланабыз. Мисалы, квадратты аныктаганда бизге мурда белгилүү болгон кесинди, кесиндилердин барабардыгы, тик бурч жана башка түшүнүктөрдөн пайдаланабыз. Демек, улам кийинки (жаңы) түшүнүккө аныктама берүү үчүн ага чейин белгилүү болгон мурунку түшүнүктөрдөн пайдаланууга туура келет. Бирок бул процессти эң алгачкы, түпкү түшүнүккө чейин гана улантууга болот. Себеби эң алгачкы аныктаманы айта албайбыз, анткени андан мурда аныкталган түшүнүк жок да. Ошондуктан геометрияда айрым түшүнүктөрдү аныктоосуз кабыл алууга туура келет. Андай аныкталбай турган түпкү, негизги түшүнүктөр катары **чекит, түз сызык, тегиздик** жана **көптүк** кабыл алынган.

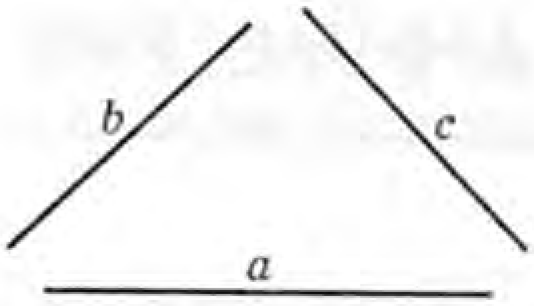
Ошентип, геометрияны баяндай баштаганда эле аныктоосуз кабыл алынган мындай түшүнүктөрдү **негизги** же **баштапкы түшүнүктөр** деп аташат. Ал эми калган түшүнүктөрдүн бардыгы ошол негизги түшүнүктөр аркылуу гана аныкталат.

Негизги түшүнүктөргө аныктама берилбегендиктен, аларды оюбузда белгилүү деп эсептеп, чиймеде сызып сүрөттөп көрсөтүүгө туура келет.

Чекит өзүнүн ээлеп турган абалына карата мүнөздөлөт. Чекиттерди чиймеде (сүрөттөп) көрсөтүү үчүн карандаштын учу менен белгилеп, аларды чоң латын тамгалары аркылуу көрсөтүп жазабыз. Мисалы A, B, C ... чекиттери (1-сүрөт).



1-сүрөт.



2-сүрөт.

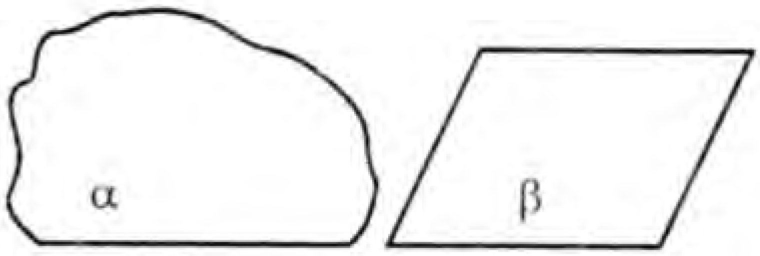
Чиймеде түз сызыкты сүрөттөп көрсөтүү үчүн сызгычты колдонобуз. Сызгычты ар кандай абалда которуштуруп коюп, бир нече түз сызыктарды сызууга болот (2-сүрөт). Аларды кичине латын тамгалары аркылуу a, b, c ... деп белгилөөгө мүмкүн.

Түз сызыкты чексиз созууга болот. Сүрөттө алардын бөлүктөрү гана сызылып көрсөтүлдү.

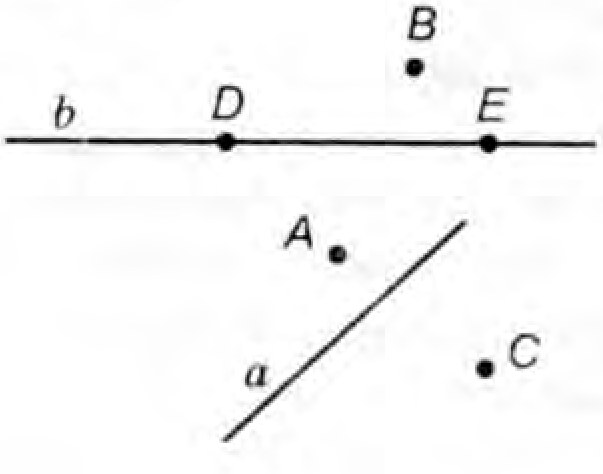
Столдун бетин, терезенин айнегинин бетин, класстагы досканын бетин тегиздик катары элестетүүгө болот, бирок алар чектелген. Ал эми тегиздик болсо бардык тарабына чексиз созулат. Чиймеде тегиздикти сүрөттөп көрсөтүү үчүн кандайдыр ийри сызык менен чектелген фигураны же төрт бурчтукту пайдаланышат (3-сүрөт).

Алар тегиздиктин бөлүгүн гана мүнөздөшөт. Тегиздиктерди гректин α(альфа), β (бета) жана башка тамгалары аркылуу же жөн эле чоң тамга аркылуу да белгилешет.

Бирок, геометриянын планиметрия (латындын *planum* деген сөзүнөн алынган, кыргызча тегиздик дегенди түшүндүрөт) бөлүмүндө бардык фигуралар тегиздикте каралып жаткандыктан, мындан ары чиймеде тегиздикти дайыма эле сызып көрсөтүү талап кылынбайт, ал берилген деп эсептелет.



3-сүрөт.



4-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. 4-сүрөттө чекиттер жана түз сызыктар көрсөтүлгөн. Аларды белгилеп жазып көрсөткүлө. Чекиттер жана түз сызыктар кандай белгиленет?

2. 4-сүрөттөгү a түз сызыгынын K, L чекиттерин белгилегиле. Ал эки чекит аркылуу түз сызыкты кандай белгилеп жазууга болот?

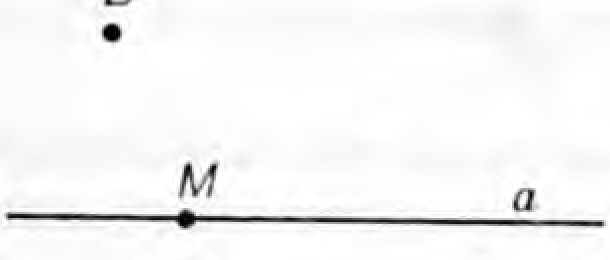
3. M чекитин белгилеп, ал аркылуу өтүүчү a түз сызыгын сызгыла. Ал чекит аркылуу өтүүчү дагы канча түз сызык сызууга болот?

4. A жана B чекиттерин белгилегиле. Ал эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыкты сызгыла. Аны эки чекит аркылуу белгилеп жазгыла. Ал түз сызыкты бир тамга аркылуу да белгилеп көрсөткүлө.

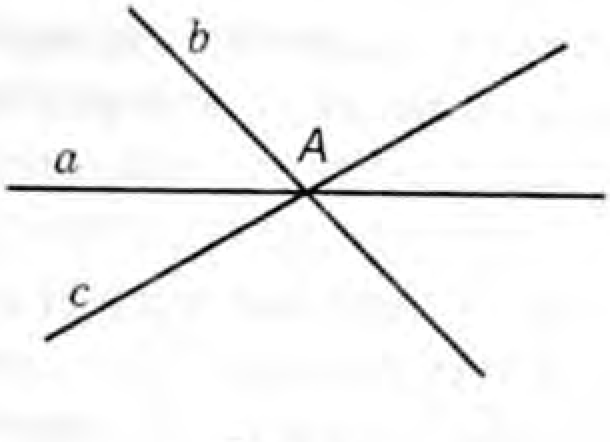
1.2. ТЕГИЗДИКТЕГИ ЧЕКИТТЕРДИН ЖАНА ТҮЗ СЫЗЫКТАРДЫН ӨЗ АРА ЖАЙЛАНЫШЫ

Адегенде чекит менен түз сызыктын өз ара жайланышына токтолобуз. Чекитти тегиздикте каалагандай кылып белгилеп алууга мүмкүн болгондуктан, аны түз сызыктан да белгилеп көрсөтүүгө болот. Анда түз сызык чекиттерден турат деп эсептөөгө мүмкүн. a түз сызыгынан каалагандай M чекитин белгилейбиз (5-сүрөт). Бул учурда M чекити a түз сызыгында жатат же M чекити a түз сызыгына тиешелүү деп айтышат да, аны кыскача $M \in a$ түрүндө белгилешет[1]. Кээде аны a түз сызыгы M чекити аркылуу өтөт деп да эсептешет. Ал эми 5-сүрөттө берилген B чекити a түз сызыгында жатпайт, башкача айтканда B чекити a түз сызыгына тиешелүү эмес, аны $B \notin a$ түрүндө белгилешет[2].

Ошентип, негизги түшүнүктөр болуп эсептелишкен чекиттерди да, түз сызыктарды да тегиздикте белгилөөгө болот. Тегиздикте A чекитин белгилеп, сызгычты колдонуп ал чекит аркылуу өтүүчү бир нече a, b, c ... түз сызыктарды сызууга болот (6-сүрөт).



5-сүрөт.



6-сүрөт.

---

[1] «∈» — *тиешелүү* дегенди түшүндүрүүчү белги.

[2] «∉» — *тиешелүү эмес* дегенди түшүндүрүүчү белги.

Демек, бир чекит аркылуу өтүүчү чексиз көп түз сызыктар болот деп эсептөөгө мүмкүн. Бул учурда a, b, c ... түз сызыктары A чекитинде кесилишет деп айтышат.

Тегиздикте A жана B чекиттери берилсе, анда сызгычтын бир кырын ал чекиттер менен дал келгендей кылып коюп түз сызык сызабыз (7-сүрөт).

7-сүрөт.

Мында A, B чекиттери аркылуу өтүүчү бир гана түз сызыкты сызууга мүмкүн болот. Аны кыскача AB түз сызыгы деп белгилешет, демек түз сызыкты эки тамга менен да белгилеп жазууга мүмкүн.

Жогоруда баяндалган негизги түшүнүктөрдөгү чекиттер менен түз сызыктардын өз-ара жайланышына карата айтылган сүйлөмдөр өзүнөн-өзү белгилүү болуп турат, алар далилдөөлөрдү талап кылбайт. Ошондуктан аларды аксиомалар[1] же негизги касиеттер түрүндө баяндоого болот. Ал аксиомалар теоремаларды[2] далилдөөдө жана талкуулоолордо кеңири колдонулат.

Мында аныкталбай турган, негизги түшүнүктөрдүн арасындагы негизги байланыштарды мүнөздөөгө туура келет, андай байланыш катары **жатат, арасында жатат** деген сөздөрдү колдонууга болот. Кээде жатат деген сөздүн ордуна тиешелүү деген сөз да колдонулат. Адегенде тегиздиктеги чекиттердин жана түз сызыктардын бири-бирине тиешелүүлүгү жөнүндөгү негизги касиеттерге токтолобуз. Алар геометрияда негизги касиеттердин биринчи группасын аныктайт да, тиешелүүлүк касиеттери (аксиомалары) деп аталат. Алар төмөндөгүдөй айтылат.

I_1. Каалагандай түз сызыкка карата ал түз сызыкта жатуучу чекиттер жана анда жатпаган чекиттер болот.

I_2. Каалагандай эки чекит аркылуу бир гана түз сызык өтөт.

Бул негизги касиеттерди колдонуп, төмөндөгүдөй айрым корутундуларды алууга болот.

а) I_1 негизги касиетке таянып каалагандай түз сызыкта жатуучу чекиттерди дайыма табууга, белгилеп алууга болот, алардын саны жөнүндө чектөө коюлган эмес. Мындан **ар бир түз сызыкта чексиз көп чекиттер бар** деген корутундуну айтууга болот.

---

[1] Грек сөзү, *далилдөөсүз кабыл алынган сүйлөм* деген мааниде.

[2] § 2.4 кара.

б) Тегиздикте эки түз сызык бирден ашык жалпы чекитке ээ болбойт, башкача айтканда эки түз сызык бир гана чекитте кесилишет. Эгерде тегиздикте берилген a жана b түз сызыктары A жана B чекиттеринде кесилишет деп эсептесек, анда A жана B чекиттери аркылуу a жана b деген эки түз сызык өткөн болоор эле. Бул I_2 касиетине каршы келет. Демек, **тегиздикте жаткан эки түз сызык бир чекитте кесилишет же кесилишпейт.**

в) Сызгычты колдонуп тегиздикте берилген эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыкты сызууга болот. I_2 аксиоманын негизинде андай түз сызык бирөө гана болот, ал түз сызык толугу менен берилген тегиздикте жатат. Ошондуктан түз сызыктын эки чекити тегиздикте жатса, анда анын бардык чекиттери ал тегиздикте жатат, б. а. түз сызык толугу менен тегиздикте жатат деген корутундуну айта алабыз.

5. 8-сүрөттөгү чекиттердин кайсынысы a түз сызыгында, кайсынысы b түз сызыгында жатат? Кайсынысы жатпайт? Аларды $\in$ же $\notin$ белгилери аркылуу жазгыла.

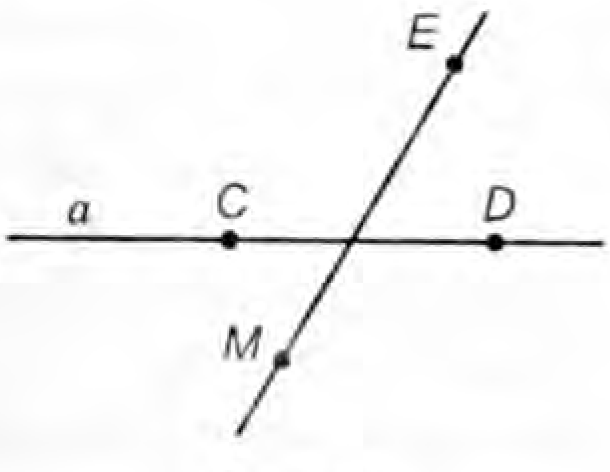
6. 1-маселедеги чекиттердин кайсынысы a түз сызыгында, кайсынысы b түз сызыгында жатат? Кайсынысы түз сызыкта жатпайт? Аларды тиешелүү белгилөөлөр аркылуу жазгыла.

7. $M \in a$ жана $B \notin b$ деген жазууларды сүрөттө кандай көрсөтүүгө мүмкүн? Аларды кандай түшүндүрүп айтууга болот?

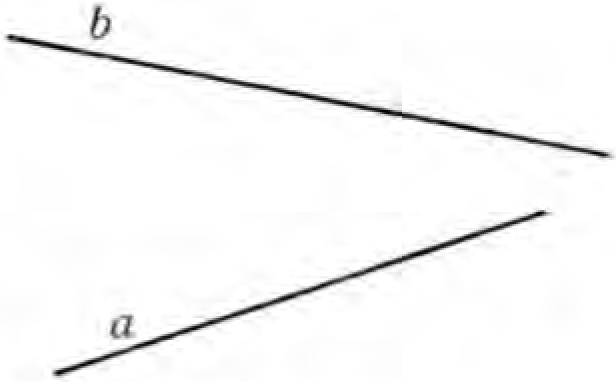
8. a түз сызыгы берилген. I_1, I_2 аксиомаларды пайдаланып, башка дагы түз сызыктарды жүргүзүүгө болоорун көрсөткүлө.

9. a жана b түз сызыктары берилген (9-сүрөт). Алардын кесилишкен C чекитин көрсөткүлө, a, b түз сызыктарынан тиешелүү түрдө A, B чекиттерин белгилеп, берилген түз сызыктарды эки тамга аркылуу да белгилеп жазгыла.

10. AB жана AC түз сызыктары кесилишет. а) Алардын кесилишкен чекитин белгилегиле; б) BC түз сызыгы AB түз сызыгы менен да, AC түз сызыгы менен да дал келбей тургандыгын түшүндүрүп бергиле (тиешелүү чиймени өзүңөр сызгыла).



8-сүрөт.



9-сүрөт.

1.3. КЕСИНДИ. ШООЛА

Геометрияда кесинди жана шоола деген түшүнүктөр кеңири колдонулат. Алар түз сызыктын бөлүктөрү катары аныкталат.

Түз сызыкта чексиз көп чекиттер жата тургандыгы белгилүү. Анда ал чекиттер түз сызыкта кандай тартипте жайланышат деген суроо туулат. Андай суроого жооп берүү үчүн бир түз сызыкта жаткан үч чекитти карап көрөлү.

a түз сызыгын жана ал түз сызыкта жаткан *A*, *B*, *C* чекиттерин алалы (10-сүрөт). Мында *C* чекити *A* жана *B* чекитеринин арасында жатат деп айтууга болот. Ошондой эле, *C* чекитин *B* жана *A* чекиттеринин арасында жатат деп да айта алабыз. Бирок, *B* (же *A*) чекити *A* жана *C* (*B* жана *C*) чекиттеринин арасында жатат деп айта албайбыз. Анткени *A* жана *C* (*B* жана *C*) чекиттери *B* (*A*) чекитинин бир жагында жатат.

Ушул арасында деген түшүнүк аркылуу чекиттердин түз сызыкта жана тегиздикте жайланышын негизги касиеттер түрүндө баяндап айтууга болот. Алар II группадагы негизги касиеттерди түзөт да, иреттүүлүк аксиомалары деп аталышат. Анын биринчи негизги касиети төмөндөгүдөй айтылат.

10-сүрөт.

II$_1$. Түз сызыктагы үч чекиттин бирөө гана калган экөөнүн арасында жатат.

Арасында жатат деген түшүнүк кесинди жана шоола жөнүндөгү түшүнүктөрдү аныктоого мүмкүнчүлүк берет.

Түз сызыктын каалагандай эки чекитинин арасында жаткан чекиттердин көптүгү кесинди деп аталат. Анда кесиндини түз сызыктын эки чекити менен чектелген бөлүгү катарында да кароого болот.

Демек 10-сүрөттөгү түз сызыктын *A* жана *B* чекиттеринин арасында жаткан каалагандай *C* чекиттеринин көптүгү кесиндини аныктайт. Ал кесинди *AB* же *BA* аркылуу белгиленет. Кээде кесиндини бир эле кичине тамга (*a*, *b* ж. у. с.) менен да белгилөөгө болот. Мында *AB* кесиндиси *a* түз сызыгында жатат деп эсептешет.

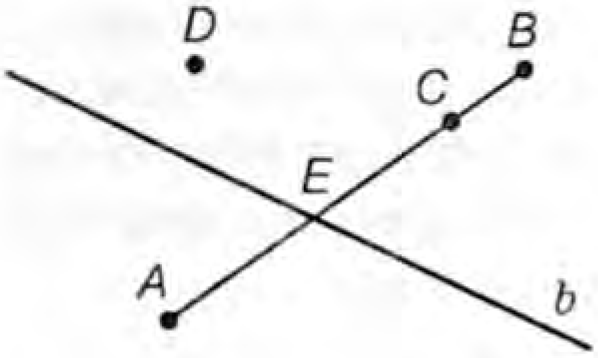
Кесиндини өзүнчө сызып көрсөтүүгө болот (11-сүрөт). *AB* кесиндисинин *A* жана *B* чекиттери анын учтары деп аталат.

Түз сызыкта чекиттер чексиз көп болгондуктан кесиндиде да чексиз көп чекиттер бар деп эсептейбиз. Анткени *A* жана *B* чекиттеринин арасында жаткан *C* чекитин каалагандай кылып тандап алууга болот. Мында *C* чекити *AB* кесиндисинде жатат деп айтышат.

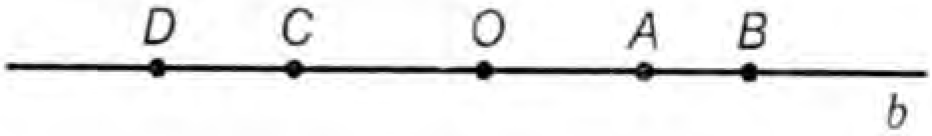
Ал эми *D* чекити *AB* кесиндисинде жатпайт (11-сүрөт).

Эгерде *AB* кесиндиси ал аркылуу өтпөгөн *b* түз сызыгы менен *E* жалпы чекитине ээ болсо, анда *AB* кесиндиси менен *b* түз сызыгы *E* чекитинде кесилишет деп айтылат (11-сүрөт). Мында *E* чекити *AB* кесиндисинде жатат.

b түз сызыгы берилсин (12-сүрөт). Ал түз сызыктан алынган каалагандай *O* чекити аны эки бөлүккө бөлөт, алардын ар бирин жарым түз сызык деп айтабыз. *A*, *B* ж. б. чекиттери ал жарым түз сызыктардын биринде, ал эми *C*, *D* ж. б. чекиттери экинчисинде жатышат. Мындагы *O* чекити түз сызыкты бөлүүчү — чекит же жарым түз сызыктардын башталыш чекити катары кабыл алынат.



11-сүрөт.



12-сүрөт.

Мында бир өзгөчөлүктү байкоого болот. *O* чекити жарым түз сызыктардын биринде жаткан каалагандай эки чекиттин (мисалы, *A*, *B* чекиттеринин же *C*, *D* чекиттеринин) арасында жатат. Бул жогорудагы жөнөкөй түшүнүктөрдүн негизинде II группадагы негизги касиеттердин экинчисин төмөнкүдөй баяндоого болот.

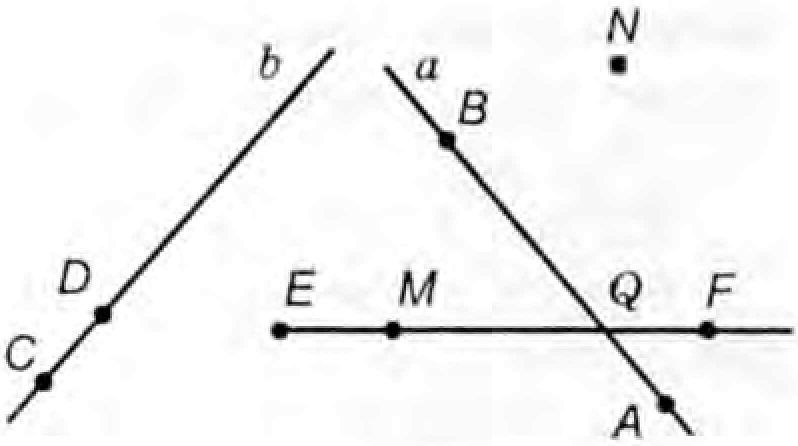
II_2. Түз сызыкта жаткан чекит ал түз сызыкты эки жарым түз сызыкка бөлөт. Жарым түз сызыкты шоола деп аташат.

12-сүрөттөгү жарым түз сызыктарды же шоолаларды эки тамга менен белгилейбиз: *OA* же *OC*. Мында биринчи тамгасы шооланын же жарым түз сызыктын башталыш чекитин, ал эми экинчиси-каалагандай чекитин аныктайт.

Ошентип, түз сызыкта жаткан ар кандай чекит аны эки шоолага бөлөт, ал шоолалар жарым түз сызыктарды түзөт. Ошондуктан *OA*, *OC* шоолалары толуктоочу шоолалар же карама-каршы шоолалар деп аталышат. Демек, шоола түз сызыктын бөлүгү болуп эсептелет.

EF шооласы берилсин (13-сүрөт). Бул шооладан *M* чекитин белгилейбиз. Мында *M* чекити ал шоолада жатат, ал эми *N* чекити шоолада жатпайт.

Шоолада белгиленген *EM* кесиндиси *EF* шооласында жатат. Ошондуктан *EM* кесиндисин *EF* шооласынын бөлүгү деп да кароого болот.



13-сүрөт.

Эгерде кесинди (түз сызык) берилген шоола менен жалпы чекитке ээ болсо (болбосо), анда кесинди (түз сызык) жана шоола ошол чекитте кесилишет (кесилишпейт) деп айтышат. Мисалы, 13-сүрөттө берилген *EF* шооласы *AB* кесиндиси (*a* түз сызыгы) менен *Q* чекитинде кесилишет, ал эми *CD* кесиндиси (*b* түз сызыгы) менен кесилишпейт.

Тегиздикте каалагандай бир чекитти белгилеп алсак, анда башталышы ошол чекит болгондой кылып чексиз көп шоолаларды сызууга болот. Мындай жыйынтык § 1.2 де бир чекит аркылуу өтүүчү чексиз көп түз сызыктар болот деген корутундунун негизинде келип чыгат.

11. *a* түз сызыгында жатуучу *A*, *B*, *C* чекиттери берилген (14-сүрөт). Алардын кайсынысы калган экөөнүн арасында жатат? *C* чекитин *A* менен *B* нын арасында жатат деп айтуга болобу?

12. *a* түз сызыгында жатуучу *A*, *B*, *C*, *D* төрт чекити берилген (15-сүрөт). а) Бири калган экөөнүн арасында жатуучу үч чекиттерди атагыла; б) бири калган үчөөнүн арасында жатпаган чекиттерди атагыла.

13. 15-сүрөттөгү *a* түз сызыгындагы чекиттерден түзүлгөн: а) кесиндилерди белгилеп жазгыла; б) канча кесинди түзүлдү? в) *B* чекити кайсы кесиндиде жатат? г) *D* чекити *AB* кесиндисинде жатабы?

14. Бир түз сызыкта жатпаган *M*, *N*, *P* чекиттери берилген. Алардын ар бир эки чекити аркылуу өтүүчү канча: а) кесинди; б) түз сызык сызууга болот? Белгилеп жазгыла. Ар кан-

14-сүрөт.

15-сүрөт.

дай эки түз сызыктын кесилишкен эки чекитин көрсөткүлө. *M* чекити *NP* кесиндисинде жатабы?

15. *A* чекити *a* түз сызыгын *AB* жана *AC* жарым түз сызыктарга бөлөт (16-сүрөт). а) Жарым түз сызыктардын биреөндө жаткан эки чекитти көрсөткүлө; б) ар түрдүү жарым түз сызыктарда жаткан экиден чекитти белгилеп көрсөткүлө.

16. *a* жана *b* түз сызыктары *M* чекитинде кесилишет. Канча жарым түз сызыктар алынды? Аларды белгилеп жазгыла.

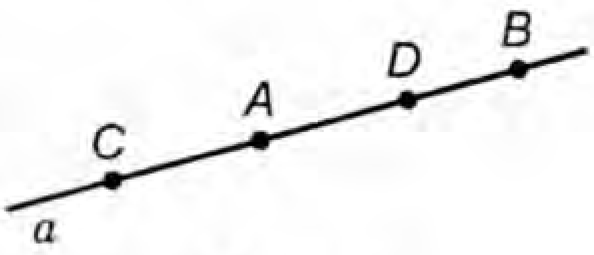
17. 16-сүрөттө *a* түз сызыгынын *C* жана *D* чекиттери аркылуу аныкталган жарым түз сызыктарды тапкыла. Канча жарым түз сызык алынды?

18. 17-маселедеги толуктоочу шоолаларды көрсөткүлө.

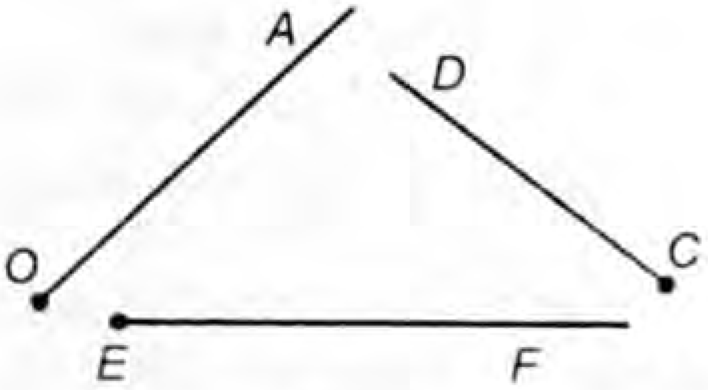
19. 17-сүрөттөгү *OA*, *CD*, *EF* шоолаларынын ичинен бири-бири менен кесилишпей турган жана кесилише турган шоолаларды аныктагыла. Кесилишкен чекитин түзгүлө.

20. 16-сүрөттө: а) Башталышы берилген чекиттерде жаткан канча шоола бар? б) *D* чекитинин бир жагында кайсы чекиттер жайгашкан? Ар түрдүү жагындачы? в) *D* чекити кайсы чекиттердин арасында (бир жагында) жатат?

21. Бир түз сызыкта жатпаган *A*, *B*, *C* чекиттери берилген (18-сүрөт). Алардын ар бир түгөйү аркылуу түз сызык жүргүзгүлө. а) Канча түз сызык сызылды? Аларды белгилегиле; б) Түз сызыктардын кесилишкен чекиттерин аныктагыла. Алар кайсы түз сызыктардын кесилишкен чекити болот? в) Башталышы *A*, *B*, *C* чекиттери болгон шоолаларды атагыла. Кошумча белгилөөлөр аркылуу шоолаларды жазгыла. Канча шоола алынды?



16-сүрөт.



17-сүрөт.

18-сүрөт.

Эми тегиздикте жаткан түз сызыкка карата ал тегиздиктин чекиттеринин кандай жайланышканын мүнөздөөчү түшүнүктөрдү карайбыз.

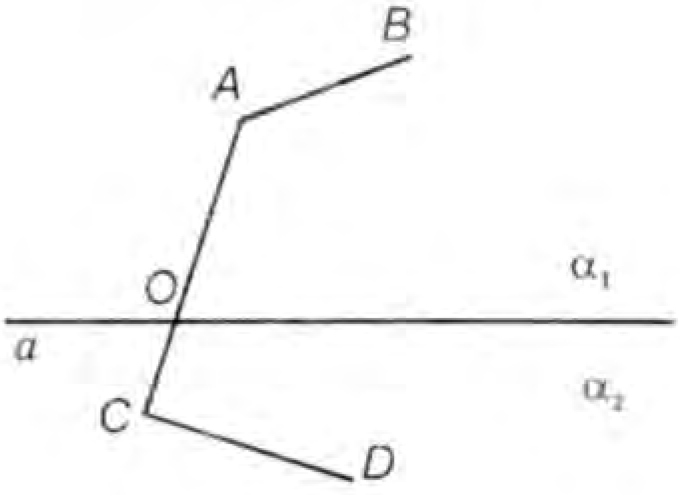
α тегиздиги жана ал тегиздикте жаткан a түз сызыгы берилсин (19-сүрөт). a түз сызыгы берилген тегиздикти эки бөлүккө бөлөт. Алардын ар бирин жарым тегиздик деп атайбыз. Жарым тегиздиктердин бирин α_1, экинчисин α_2 аркылуу белгилейли. Мында α_1 жана α_2 тегиздиктеринин чогуусу α тегиздигин түзөт. a түз сызыгы бөлүүчү түз сызык деп эсептелет.

Геометрияда маанилүү болгон төмөндөгүдөй өзгөчөлүккө көңүл бурабыз. A, B чекиттери бир гана жарым тегиздикте жатышат, аларды туташтыруучу AB кесиндиси a түз сызыгы менен кесилишпейт. C, D чекиттери жана CD кесиндиси жөнүндө деле ушунун өзүн айтууга болот. Ал эми A жана C чекиттери ар түрдүү (α_1 жана α_2) жарым тегиздиктерде жатат. Аларды туташтыруучу AC кесиндиси a түз сызыгы менен O чекитинде кесилишет.

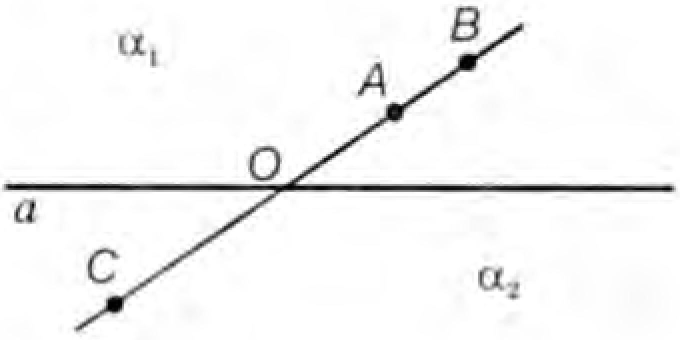
Жогорудагы түшүнүктүн негизинде түз сызыкка карата тегиздиктин чекиттеринин өз ара жайланышын мүнөздөөчү аксиоманы (негизги касиетти) баяндоого болот. Ал II группадагы аксиомалардын үчүнчүсү болот.

II$_3$. Тегиздикте жаткан түз сызык аны жарым эки тегиздикке бөлөт.

Бул аксиоманын негизинде төмөндөгүдөй корутундуну белгилей кетүүгө болот. Тегиздикти бөлүүчү a түз сызыгы каалагандай b түз сызыгы менен O чекитинде кесилишсин (20-сүрөт). Анда b түз сызыгы эки шоолага бөлүнөт. **Ал шоолалар ар түрдүү жарым тегиздиктерде жатышат.** OA жана OC шоолалары b түз сызыгында жаткан толуктоочу шоолалар болсун. Эгерде OA шоолаcынан каалагандай B чекитин алсак, анда O чекити A жана B чекиттеринин арасында жатпайт, анткени O чекити OA шоола-



19-сүрөт.

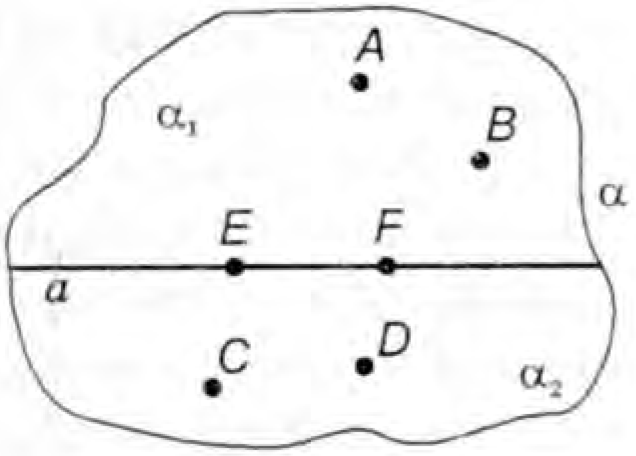


20-сүрөт.

сынын башталыш чекити. Демек AB кесиндиси a түз сызыгы менен кесилишпейт. Ошондуктан OA шооласында жаткан каалагандай A, B чекиттери жарым тегиздиктердин бирinde жатышат. Анда OA шооласы α_1 жарым тегиздигинде жатат.

OA жана OC шоолалары толуктоочу шоолалар болгондуктан O чекити A жана C чекиттеринин арасында жатат. Демек C чекити α_2 жарым тегиздигинде жатат. Анда OC шооласынын бардык чекиттери α_2 тегиздигинде жата тургандыгын жогорудагыдай көрсөтүүгө болот. Натыйжада OC шооласы α_2 жарым тегиздигинде жатат.

Ошентип, b түз сызыгынын OA, OC толуктоочу шоолалары α тегиздигиндеги a түз сызыгы аркылуу бөлүнгөн ар түрдүү жарым тегиздиктерде жатат.



21-сүрөт.

22. A, B, C, D чекиттери α тегиздигинде жатышат (21-сүрөт). Ал тегиздикте жаткан a түз сызыгы аны α_1 жана α_2 жарым тегиздиктерине бөлөт. Берилген чекиттердин ичинен: а) жарым тегиздиктердин биринде жаткандарын; б) ар түрдүү жарым тегиздиктерде жаткандарын көрсөткүлө; в) AB, AC, AD, CD, CB кесиндилеринин a түз сызыгы менен кесилишээрин же кесилишпей тургандыгын аныктагыла.

23. 22-маселеде E чекити a түз сызыгында жатса, EA, EB, EC, ED шоолаларынын кайсылары: а) бир жарым тегиздикте; б) ар түрдүү жарым тегиздиктерде жата тургандыгын аныктагыла. Түшүндүрүп бергиле. Шоолаларды сызып көрсөткүлө.

24. AE түз сызыгындагы E чекити ал түз сызыктагы A жана C чекиттеринин арасында жатпайт. Ал эми B чекити AE түз сызыгында жатпайт. A жана E чекиттери BC түз сызыгына карата бир жарым тегиздикте жатабы же ар түрдүү жарым тегиздиктерде жатабы?

25. 21-сүрөттө алынган: а) BD шооласы жана a түз сызыгы кесилишеби? б) CD шооласы менен a түз сызыгычы? Түшүндүрүп бергиле.

26. Бир түз сызыкта жатпаган A, B, C чекиттери аркылуу AB, BC жана AC түз сызыктары жүргүзүлгөн. Ал түз сызыктар аркылуу тегиздик канча бөлүккө бөлүнөт?

§ 2. ГЕОМЕТРИЯЛЫК ФИГУРАЛАР

2.1. ГЕОМЕТРИЯЛЫК ФИГУРАЛАРГА ТҮШҮНҮК

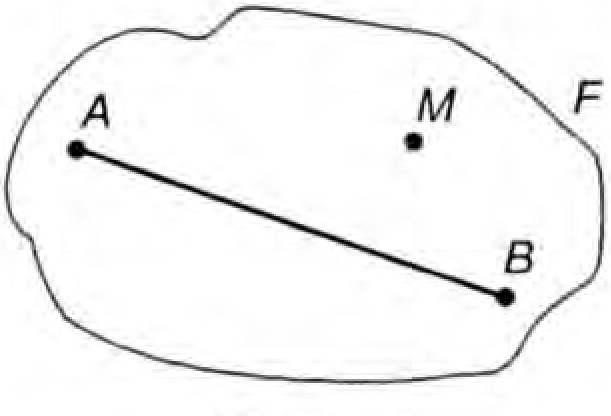
Жөнөкөй геометриялык фигураларды силер билесиңер. Мисалы үч бурчтук, квадрат жана башкалар. ABC үч бурчтугун карасак, анын чокулары A, B, C чекиттерден турат, анын AB, DC, CA жактары кесиндилер болуп эсептелет, алар да чекиттерден турат. Жалпысынан, геометриялык фигураларды чекиттердин көптүгү катары кароого болот.

Аныктама. **Чекиттердин ар кандай куру эмес көптүгү геометриялык фигура деп аталат.**

Мисалы түз сызык, шоола, кесинди, бурч, төрт бурчтук жана башкалар геометриялык фигуралар болушат. Анткени ал фигуралардын ар бири чекиттердин көптүгүнөн турат. Көптүк бир элементтен турушу да мүмкүн. Ошондуктан чекитти да геометриялык фигура деп эсептөөгө болот.

Демек, жалпы учурда туюк сызык менен чектелген тегиздиктин бөлүгүн **фигура** деп кароого болот (22-сүрөт). Геометриялык фигураны жалпы учурда F аркылуу белгилейли. Эгерде M чекити F фигурасында жатса, анда аны кыскача $M \in F$ деп жазабыз. Фигуралар эки түрдүү болот: томпок жана томпок эмес.

Эгерде F фигурасынын каалагандай эки чекитин туташтыруучу кесинди толугу менен ошол фигурада жатса, анда F фигурасы томпок деп аталат, эгерде толугу менен жатпаса, анда ал фигура томпок эмес болот. Томпок жана томпок эмес фигураларга өзүңөр мисалдар келтирип сызгыла.



22-сүрөт.

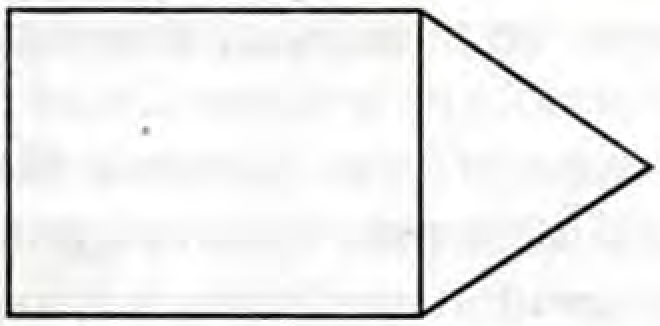
Эгерде F_1 жана F_2 фигуралары кандайдыр бир N жалпы чекитине ээ болсо, анда ал эки фигура N чекитинде кесилишет. Фигуралардын кесилишине карата N чекиттеринин көптүгү ар кандай фигура болушу мүмкүн. Ал суроолорго кийинчерээк токтолобуз.

КӨНҮГҮҮЛӨР

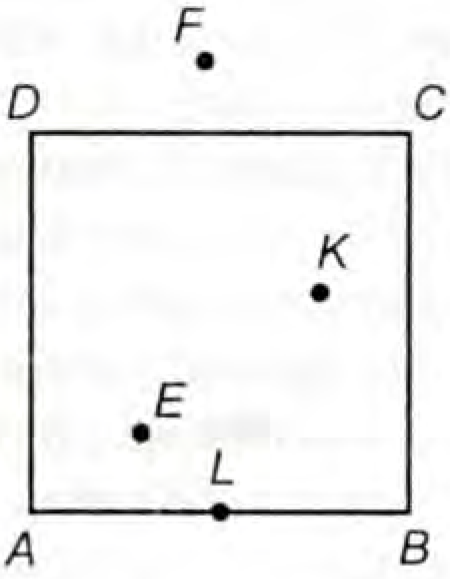
1. Силерге белгилүү болгон геометриялык фигураларды атагыла.
2. Геометриялык фигураларды аныктоодо кандай негизги түшүнүк колдонулду?
3. Жөнөкөй геометриялык фигуралар: үч бурчтук, квадрат, куб, шар (аларга кийин толук токтолобуз) белгилүү. Алардын кай-

сынысы: а) тегиздиктеги; б) мейкиндиктеги фигуралар болушат?

4. 23-сүрөттөгү фигура кандай эки фигуранын биригүүсүн аныктайт?
5. Түз сызык, шоола геометриялык фигура боло алышабы?
6. Тегиздикти геометриялык фигура деп атоого болобу?
7. Тегерек формадагы фигураларды атагыла.
8. Шар формасындагы фигураларды атагыла.
9. *ABCD* квадраты берилген (24-сүрөт). *E, F, K, L* чекиттеринин кайсынысы: а) берилген квадратта; б) квадраттын жагында жатат?
10. Бири-бирине дал келбеген эки түз сызык кесилишсе, алардын кесилиши кандай фигура болот?
11. *a* түз сызыгы жана анда жаткан *AB* шооласы берилген. Алардын кесилиши кандай фигура болот?



23-сүрөт.



24-сүрөт.

2.2. ФИГУРАЛАРДЫН БАРАБАРДЫГЫ

Геометрияда фигуралардын барабардыгын да кароого туура келет.

Эгерде эки фигураны тиешелүү чекиттери дал келгендей кылып беттештирүүгө мүмкүн болсо, анда алар **барабар** деп аталышат.

F жана F_1 фигураларынын барабардыгын $F=F_1$ түрүндө жазышат. Кай бирде барабар деген сөздүн ордуна конгруэнттүү[1] деген терминди да колдонушат. F фигурасы F_1 фигурасына конгруэнттүү дегенди $F \equiv F_1$ деп жазышат.

---

[1] Конгруэнттүү — бул латынча (*congruens*) конгруэнс деген сөздөн алынган, дал келүүчү, бирдей өлчөмдүү дегенди түшүндүрөт.

Ошентип, эки фигуранын барабардыгын аныктоодо алардын бирин экинчиси менен беттештирүүгө туура келет. Беттештирүүдө фигуралардын туура келүүчү, мүнөздүү чекиттерин жана элементтерин тандап алуу зарыл. Мисалы, $ABCD$ томпок төрт бурчтугунун $A'B'C'D'$ томпок төрт бурчтугуна барабар экендигин көрсөтүү үчүн $ABCD$ төрт бурчтугунун үстүнө $A'B'C'D'$ төрт бурчтугунун чокулары туура келгендей кылып беттештирүү керек. Эгерде A чокусу A' ж. б. чокулары менен, AB жагы $A'B'$ ж. б. жактары менен дал келсе, анда берилген эки төрт бурчтук барабар болушат.

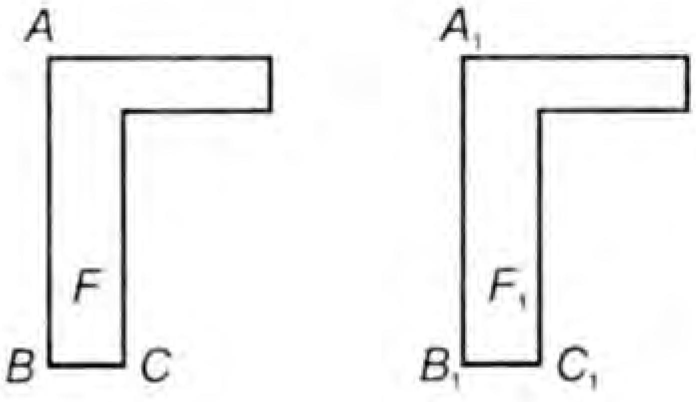
12. Кагаздан кесилген ABC жана $A_1B_1C_1$ үч бурчтуктарынын туура келүүчү жактары бирдей болсо, алардын барабардыгын аныкташ үчүн кандай кылып беттештирүү керек?

13. $ABCD$ квадратын $A_1B_1C_1D_1$ квадратына беттештиргенде A чокусу A_1, B чокусу B_1 чокусуна, ал эми C чокусу C_1 чокусуна дал келсе, ал квадраттарды барабар деп айтууга болобу? Эмне үчүн?

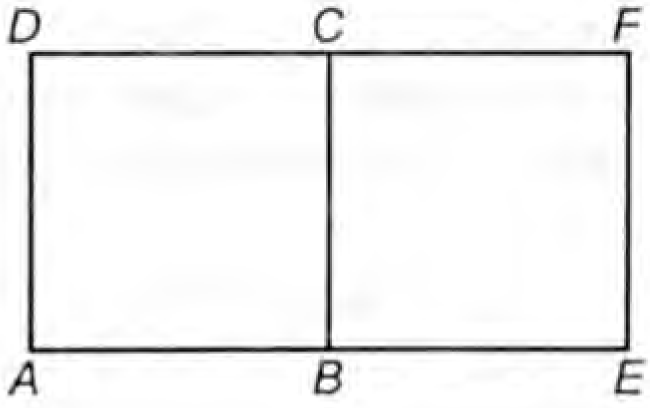
14. 25-сүрөттө бири-бирине барабар болгон F жана F_1 фигуралары берилген. Кандай жол менен жылдырып, аларды дал келтирүүгө болот?

15. Эгерде берилген $ABCD$ квадратын AC түз сызыгы боюнча кессек, бири-бирине барабар болгон эки үч бурчтук алынат. Алардын барабар үч бурчтуктар экендигине кантип ишенүүгө болот?

16. Узуну 3 см, туурасы 1,5 см болгон $ABCD$ тик бурчтугун (26-сүрөт) AB жагын бойлото 3 см ге жылдырганда $BEFC$ тик бурчтугу алынды. Ал тик бурчтуктар барабар болушабы? Эмне үчүн? Ал тик бурчтуктарды дагы кандай жол менен бирибирине дал келгендей кылып беттештирүүгө болот?



25-сүрөт.



26-сүрөт.

2.3. АЙЛАНА

Айлана туюк ийри сызыктардын эң жөнөкөйү болуп эсептелет. Ага төмөндөгүдөй аныктама берилет: **тегиздикте берилген чекиттен бирдей алыстыкта жаткан чекиттердин көптүгү айлана деп аталат.** Берилген чекитти (O ну) айлананын борбору деп аташат. Аны сызуу үчүн атайын курал — циркуль[1] колдонулат. 27-сүрөттө O борбору боюнча айлана сызылган. A, B, C чекиттери ал сызылган айланада жатат. Анда $OA=OB=OC$ болоору түшүнүктүү.

Айлананын борборунан анын каалагандай чекитине чейинки аралыкты (OA; OB) айлананын радиусу[2] деп аташат. Ал r (же R) тамгасы аркылуу белгиленет да «эр» деп окулат. Анда $OA=r$ болоору түшүнүктүү. Борбору O, радиусу r ге барабар болгон айлана $\omega(O;\, r)$ деп белгиленет (ω — омега деп окулат, грек алфавити). $\omega(O;\, r)$ айланасында жаткан каалагандай B жана C эки чекитти алалы. Ал чекиттер берилген айлананы эки бөлүккө бөлөт. Ар бир бөлүгү **айлананын жаасы** же жөн эле **жаа** деп аталат. Демек, B жана C чекиттери берилген айлананы BQC жана CLB бөлүктөргө (жааларга) бөлөт. Мында Q чекити B менен C чекиттеринин арасында жатуучу айлананын каалагандай чекити, ал эми L чекити да айлананын чекити болуп, ирээти боюнча C жана B чекиттеринин арасында жатат. Алынган жааларды тиешелүү түрдө $B\breve{Q}C$ жана $C\breve{L}B$ аркылуу же бөлүү чекиттери аркылуу, кыскача $\overset{\smile}{BC}$ же $\overset{\smile}{CB}$ түрүндө белгилеп жазышат (тамгалардын үстүнө «$\smile$», б.а. жаа белгисин жазып коюшат).

M жана N чекиттери айланада жатпайт, M чекити анын ичинде, N чекити анын сыртында жатат деп эсептелет. Анткени-айлананын аныктамасынын негизинде, $OM<r$, ал эми $ON>r$ болот. Демек, айлананын борборунан анын ичинде (сыртында) жаткан чекитке чейинки аралык радиустан кичине (чоң) болот.

Эгерде айлананын каалагандай эки чекитин (B жана C) туташтырсак, анда ал кесинди (BC) айлананын **хордасы**[3] деп аталат.

Айлананын хордасынын учтары аркылуу аныкталган $\overset{\smile}{BC}$ жаасы ал хордага туура келүүчү же ага тартылып турган жаа деп эсептелет (27-сүрөт).

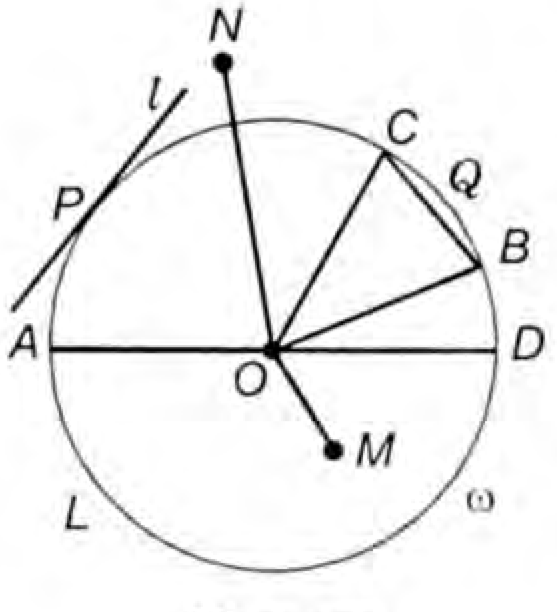
Айлананын борбору аркылуу өтүүчү хорда анын **диаметри** деп аталат. Демек, 27-сүрөттө AD диаметр болот. $AD=AO+OD=2r$

---

[1] Латындын *circulus* — тегерек, айлана деген сөзүнөн алынган.

[2] Латын сөзү, дөңгөлөктүн чабактары деген сөздү түшүндүрөт.

[3] Гректин *chorde* деген сөзүнөн алынган, «аспаптын кылы» дегенди түшүндүрөт.



27-сүрөт.

экендиги түшүнүктүү. Айлананын борбору диаметринин ортосунда болот.

Натыйжада диаметрге туура келүүчү тартылган жаа жарым айлана болот деп айтабыз.

Радиустары барабар болгон эки айлана барабар болушат. Анткени алардын борборлорун дал келтирип бири-бирине беттештиргенде дал келишет.

Эгерде түз сызык айлана менен эки жалпы чекитке ээ болсо, ал кесүүчү түз сызык болот, бир жалпы чекитке ээ болсо, ал түз сызык жаныма деп аталат (27-сүрөттө l түз сызыгы), P чекити жануу чекити болот. Эгерде эки айлана эки жалпы чекитке ээ болушса, анда алар кесилишет. Бир жалпы чекитке ээ болушса, анда алар ичинен же сыртынан жанышат деп айтышат. Аларга § 19 та толук токтолобуз.

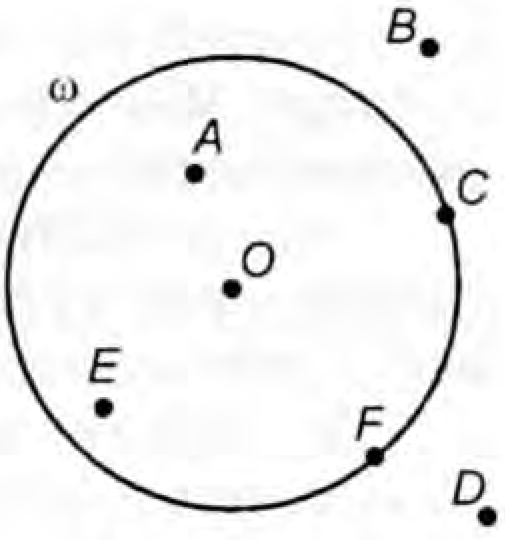
Айлананы чекиттердин геометриялык орду катарында да аныктоого болот.

Эскертүү. Чекиттердин геометриялык орду дегенди чекиттердин көптүгү (же чогуусу) деп да түшүнөбүз. Чекиттердин геометриялык орду тегиздикте же мейкиндикте каралышы мүмкүн. Биз төмөндө тегиздиктеги чекиттердин геометриялык ордуна токтолобуз.

Чекиттердин геометриялык орду кандайдыр фигураны аныктайт. Бирок, мында өзгөчө шарт коюлат: чекиттердин геометриялык ордунда (фигурада) жаткан ар бир чекит белгилүү бир касиетке баш ийиши керек. Анда чекиттердин геометриялык ордуна төмөндөгүдөй аныктама берүүгө болот.

Аныктама. **Чекиттердин геометриялык орду деп, кандайдыр бир касиетке ээ болуучу чекиттерден турган фигураны айтабыз.** Мисалы: тегиздикте берилген чекиттен бирдей алыстыкта жаткан чекиттердин геометриялык орду айлана болот. Мында чекиттердин геометриялык ордуна тиешелүү касиет болуп, бирдей алыстыкта жаткан деген түшүнүк эсептелет.

17. Айлананы геометриялык фигура деп атоого болобу? Эмне үчүн?
18. Айлананы аныктоодо кандай негизги түшүнүк колдонулду?
19. Борбору O чекити, радиусу 3,5 см болгон айлана сызылган. Диаметрин тапкыла.
20. Борбору C чекити, диаметри AB=8 см болгон айлана сызгыла. Радиусун тапкыла.



28-сүрөт.

21. $\omega(O; R)$ айланасын сызгыла (28-сүрөт). Берилген A, B, C, D, E, F, O чекиттеринин кайсынысы айлананын: а) ичинде; б) сыртында; в) айланада жатат; г) O чекити айланада жатат деп айтууга болобу?; д) OC жана OF аралыктары эмнеге барабар?

22. A чекити аркылуу (28-сүрөт) түз сызык жүргүзсөк, ал айлана менен кесилишеби? Канча чекитте кесилишет?

23. $\omega(O; R)$ айланасынын O борборун башталыш чекити деп алып шоола жүргүзсөк, ал айлананы канча чекитте кесет?

24. Бири-бирин кесип өтүүчү $\omega(O; R)$ жана $\omega_1(O_1; R_1)$ айланаларын сызгыла. Канча чекитте кесилишти? Ал эки айлана үч чекитте кесилиши мүмкүнбү?

25. Борборлору бир чекитте жаткан, радиустары 2 см жана 3 см болгон эки айлана сызгыла. Алардын кайсынысы чоң болот?

26. Радиустары бирдей болгон $\omega(O; R)$ жана $\omega_1(O_1; R_1)$ айланалары берилген. Алардын барабардыгын кантип көрсөтүүгө болот?

2.4. ТЕОРЕМА ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

Геометрияда аныктамалардан жана аксиомалардан тышкары геометриялык түшүнүктөрдү баяндоо үчүн **теорема**[1] деп аталуучу сүйлөмдөр да көп кездешет. Геометриялык фигуралардын касиеттери жана байланыштары, кандайдыр ырастоолор түрүндө туюнтулат да, алардын тууралыгына далилдөөлөр аркылуу гана ишенүүгө болот.

Аныктама. **Далилденүүсү талап кылынган сүйлөм теорема деп аталат.**

Теореманын тууралыгын көрсөтүүчү талкуулоолордун тизмеги анын **далилдөөсү** деп аталат. Теореманы даилдөөдө ага чейин белгилүү болгон аныктамалар, негизги касиеттер жана теоремалар колдонулат.

Ошентип, теорема дегенибиз чындыгы далилдөөнүн жардамы менен аныктала турган математикалык сүйлөм катарында каралат. Теорема ар кандай формада баяндалышы мүмкүн. Силер арифметикадагы көп эле теоремалардын баяндалышын билесиңер. Ар кандай теорема түшүндүрүүчү бөлүктөн, шарты жана

---

[1] Грек сөзү, тууралыгы далилдөө аркылуу белгилүү болгон сүйлөм.

корутундусу деп аталуучу сүйлөмдөрдөн тураарын оңой байкоого болот. Мисалы, силерге арифметикадан белгилүү болгон теореманы карап көрөлү.

1-теорема. **Эгерде берилген натуралдык сандын акыркы эки цифрасынан түзүлгөн сан төрткө бөлүнсө, анда берилген сан өзү да төрткө бөлүнөт.**

Бул теорема натуралдык сандардын көптүгүндө каралат, аны теореманын түшүндүрүүчү бөлүгү деп эсептөөгө болот. Ал көптүктө «сандын акыркы эки цифрасынан түзүлгөн сан төрткө бөлүнсө» – деген — бул теореманын шарты болуп эсептелет. «Сандын өзү да төрткө бөлүнөт» – деген бул теореманын корутундусу болуп эсептелет.

27. Төмөнкү сүйлөмдөрдүн кайсынысы негизги касиет же теорема болоорун түшүндүрүп бергиле: 1) Каалагандай эки чекит аркылуу бир гана түз сызык жүргүзүүгө болот. 2) Квадраттын диагоналдары барабар. 3) Айлананын борборунан чыгуучу шоола аны бир чекитте кесип өтөт. 4) Бир түз сызыкта жаткан үч чекиттин бирөө гана калган экөөнүн арасында жатат.

28. Айлананын борбору аркылуу өтүүчү түз сызык аны эки чекитте кесип өтөөрүн далилдегиле.

29. α тегиздигинде берилген a түз сызыгы аны α_1 жана α_2 жарым тегиздиктерине бөлөт. $A \in \alpha_1$, $B \in \alpha_2$. AB түз сызыгы a түз сызыгын кесип өтөт. Бул сүйлөм негизги касиетпи же теоремабы?

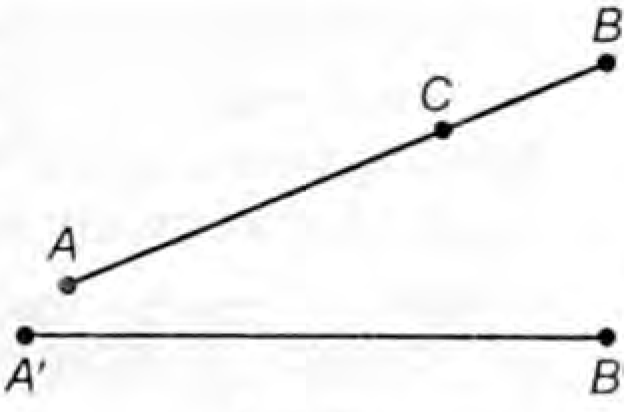
§ 3 КЕСИНДИЛЕРДИ ӨЛЧӨӨ

3.1. КЕСИНДИЛЕРДИН БАРАБАРДЫГЫ

AB жана $A'B'$ кесиндилери берилсин (29-сүрөт). Эгерде AB кесиндисин $A'B'$ кесиндисинин үстүнө A жана A'чекиттери дал келгендей кылып койгондо B жана B' учтары да дал келсе, анда AB жана $A'B'$ кесиндилери барабар деп аталат да, $AB=A'B'$ түрүндө жазылат.

Демек, эки кесиндинин бирин экинчисинин үстүнө бардык чекиттери дал келгендей кылып коюуга мүмкүн болсо, анда алар барабар болушат.

Бул түшүнүк AB кесиндисине барабар болгон кесиндини $A'B'$ шооласына A' башталыш чекитинен баштап өлчөп коюуга (түзүүгө) мүмкүн экендигин аныктайт. Демек, кесинди берилсе, анда каалагандай шоолада бир учу шооланын башталышында, ал эми экинчи учу ал шоолада жаткандай жана ага барабар болгон кесиндини дайыма табууга болот.

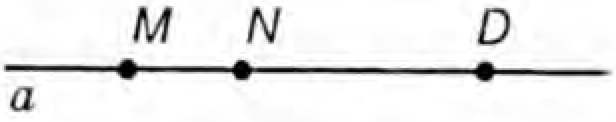


29-сүрөт.

29-сүрөттө C чекити AB кесиндисинде жатат. Бул учурда C чекити AB кесиндисин эки кесиндиге бөлөт: AC жана CB. Анда AB кесиндиси AC жана CB кесиндилеринин суммасына барабар деп айтышат. Аны $AB=AC+CB$ түрүндө жазышат. Бул учурда $CB=AB-AC$ деп да жазууга болот.

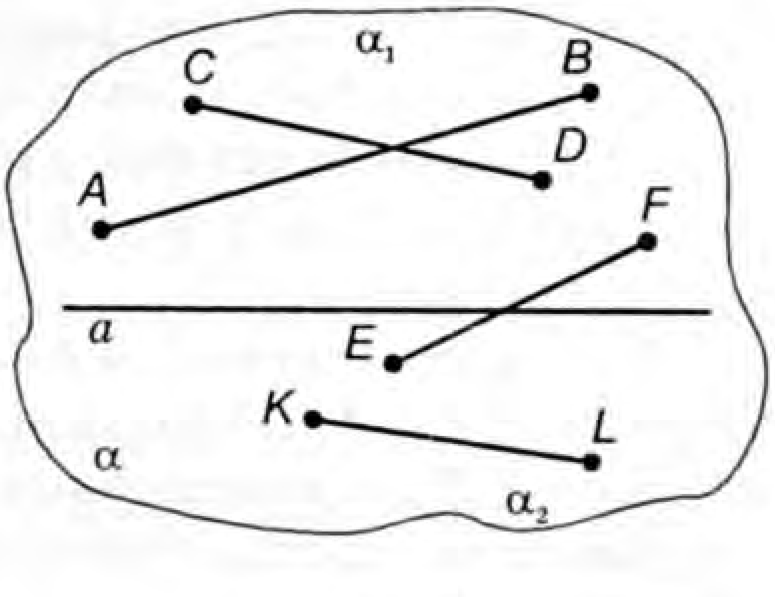
КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Квадраттын жактары барабар болоорун кантип түшүндүрүүгө болот?
2. Бир түз сызыкта жаткан M, N, D чекиттери (30-сүрөт) берилген. а) Кайсы чекит калган экөөнүн арасында жатат? в) MN жана ND кесиндилеринин суммасы кандай кесиндини аныктайт? г) MD жана ND кесиндилеринин айырмасын аныктоочу кесиндини көрсөткүлө.
3. AB жана BC эки кесиндини OM шооласына O дон баштап циркуль менен өлчөп койгондо эки учурда тең OE кесиндиси алынды. AB жана BC кесиндилери жөнүндө эмнени айтууга болот?



30-сүрөт.

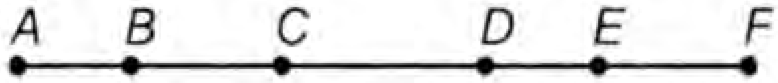
4. Эки кесиндинин барабардыгын дагы кандай жол менен аныктоого болот?
5. $ABCD$ квадраты берилген. AB, BC, CD, DA, AC, BD кесиндилеринин ичинен: а) барабар; б) кесилишүүчү; в) кесилишпей турган кесиндилерди аныктагыла. Чиймеде көрсөткүлө.
6. α тегиздиги, анда жаткан AB, CD, EF жана KL кесиндилери берилген (31-сүрөт). Ал тегиздикте жаткан a түз сызыгы аны α_1 жана α_2 жарым тегиздиктерге бөлөт. 1) Бир жарым



31-сүрөт.

тегиздиктерде жаткан кесиндилерди көрсөткүлө; 2) кайсы кесиндилер *a* түз сызыгы менен кесилишет (кесилишпейт)? 3) өз ара кесилишүүчү (кесилишпөөчү) кесиндилерди көрсөткүлө; 4) циркулду колдонуп, барабар кесиндилерди аныктагыла.

7. $31^{а}$-сүрөттөн силер канча кесиндини көрүп жатасыңар? Аларды атагыла.



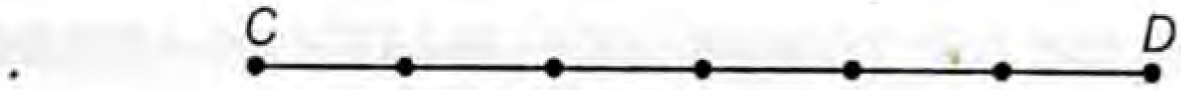
$31^{а}$-сүрөт.

3.2. КЕСИНДИНИН УЗУНДУГУ

Кесиндинин узундугун өлчөө үчүн сызгычты колдонууга болот. Мисалы, *AB* кесиндисинин узундугун өлчөө үчүн сызгычтын нөл (0) саны жазылган белгиси *A* чекитине дал келгендей кылып сызгычты кесиндини бойлото коебуз. Эгерде кесиндинин *B* чекити сызгычтын 65 мм ди же 6 см 5 мм ди туюнтуучу шкаласынын (бөлүгүнүн) тушуна туура келип калса, анда ал кесиндинин узундугу 65 мм ге барабар болот, аны AB=65 мм деп жазышат. Анда кесиндинин узундугун өлчөө бирдиги катары 1 мм алынды. Демек, кесиндинин узундугун өлчөө үчүн адегенде узундук бирдиги тандалып алынат. Узундугу тандалып алынган өлчөө бирдигине барабар болгон кесинди **бирдик кесинди** деп аталат.

Ошентип, кесиндинин узундугу дайыма сан аркылуу туюнтулат да, ал сандын катарына өлчөө бирдиги жазылып коюлат. Мисалы AB=7 см деп жазылса, анда 7 саны *AB* кесиндисинин узундугун аныктоочу сан болот. Мында узундугу 1 см ге барабар болгон бирдик кесинди *AB* кесиндисине же *AB* шооласына *A* дан баштап 7 жолу удаалаш өлчөнүп коюлганын көрсөтөт. Демек, **кесиндинин узундугун өлчөө дегенибиз, ал кесиндиде канча бирдик кесинди бар экендигин көрсөтүүчү санды табуу** болуп эсептелет.

29-сүрөттө көрсөтүлгөн *AB* кесиндисинин узундугун *A* жана *B* чекиттеринин арасындагы **аралык** деп да кароого болот. Мында *AC* жана *CB* кесиндилеринин узундуктарынын суммасы *AB* кесиндисинин узундугуна барабар экендигине оңой ишенүүгө мүмкүн.



32-сүрөт.

Циркулду пайдаланып да кесиндинин узундугун өлчөөгө болот. Ал үчүн узундугу 1 см ге барабар болгон, же каалагандай бирдик кесиндини тандап алабыз (32-сүрөт). *CD* кесиндисинин узундугун табуу үчүн *C* чекитинен баштап 1 см кесиндини циркулдун жардамы менен *CD* шооласына удаалаш өлчөп коебуз. *D* чекитине чейин 6 жолу өлчөнүп коюлса, анда *CD* кесиндисинин узундугу 6 см ге барабар болот: $CD=6$ см.

Жогорудагы кесиндилердин барабардыгынан пайдаланып кесиндилерди өлчөөнүн негизги касиеттерин (аксиомаларын) баяндоого болот. Алар III группаны түзөт.

III_1 . Ар бир кесинди нөлдөн чоң болгон белгилүү бир узундукка ээ болот.

III_2 . *AB* түз сызыгынын *C* чекити *A* жана *B* чекиттеринин арасында жатса, анда *AB* кесиндисинин узундугу *AC* жана *BC* кесиндилеринин узундуктарынын суммасына барабар.

7. *CD* бирдик кесиндиси жана *AB* кесиндиси берилди. Эгерде *CD* кесиндисин *AB* кесиндисине *A* дан баштап удаалаш өлчөп койгондо 4 жолу коюлса, анда *AB* кесиндисинин узундугу канчага барабар жана кандай жазылат? $CD=1$ дм болсо, *AB* кесиндисинин узундугун жазгыла.
8. Узундугу 12 см ге барабар болгон *MN* кесиндисине циркулдун жардамы менен 2 см кесиндини *M* ден баштап 4 жолу өлчөп койгондо *K* чекити алынды. *MK* жана *KN* кесиндилеринин узундуктарын тапкыла.
9. *PQ* кесиндиси жана анда жаткан *E* чекити берилди. $PQ=9$ см, $PE=3$ см 5 мм болсо, *EQ* кесиндисинин узундугун тапкыла. *PE* жана *EQ* кесиндилерин салыштыргыла.
10. $\omega(0;\ 3$ см$)$ айланасында *M* чекити берилген. $MB=2$ см, $MC=3$ см хордаларын сызгыла.
11. *AB* жана *CD* кесиндилери берилген. Аларды *OM* шооласына *O* дон баштап циркулдун жардамы менен өлчөп койгула да, жайланышына карата кайсынысы чоң экендигин түшүндүрүп бергиле.
12. *AB* кесиндисине *A* дан баштап узундугу 12,5 мм кесинди 8 жолу өлчөнүп коюлду. *AB* кесиндисинин узундугу канча дециметрге барабар?

3.3. КЕСИНДИЛЕР МЕНЕН АТКАРЫЛУУЧУ АМАЛДАР. СЫНЫК СЫЗЫКТЫН УЗУНДУГУ

Эгерде C чекити AB кесиндисинде жатса $AB=AC+CB$ (§ 3.1) боло тургандыгы белгилүү. C чекити AB түз сызыгында жатпаса, анда $AB<AC+CB$ боло тургандыгы түшүнүктүү. Бул акыркы барабарсыздыктын тууралыгына андагы кесиндилердин узундуктарын өлчөө аркылуу да ишенүүгө болот.

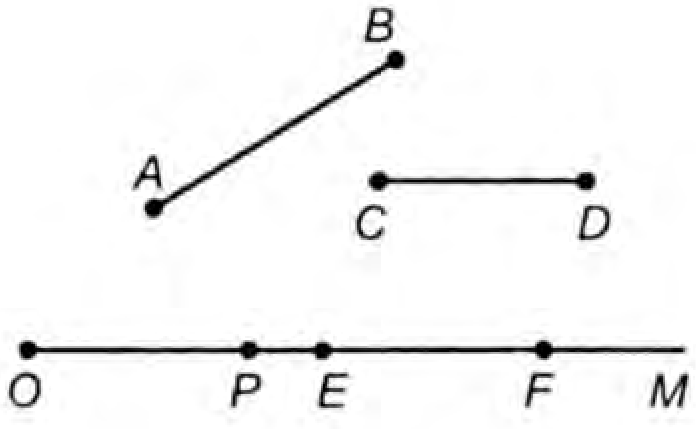
AB жана CD кесиндилери берилсин (33-сүрөт). Алардын суммасын табууга болот. OM шооласына O дон баштап, циркулдун жардамы менен $OE=AB$, $EF=CD$ кесиндилерин удаалаш өлчөп коебуз (33-сүрөт). Натыйжада $OF=OE+EF=AB+CD$ болот. Демек, OF кесиндиси AB жана CD кесиндилеринин суммасын аныктайт. Анын тууралыгына III_2 негизги касиети аркылуу ишенүүгө болот.

Ошентип, кесиндилердин суммасынын узундугун табыш үчүн алардын узундуктарынын суммасын табуу керек.

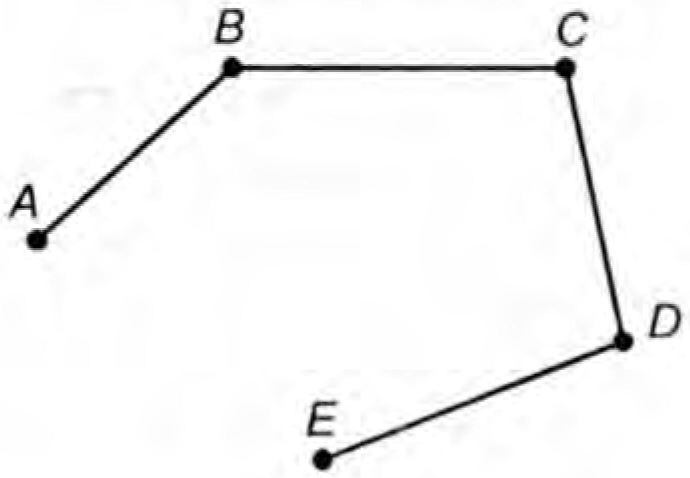
Эгерде a кесиндисин n эсе чоңойтуу, б. а. a кесиндисин n ге көбөйтүү талап кылынса, анда жогорудагы кесиндилердин суммасы жөнүндөгү түшүнүктүн негизинде, a кесиндисин OM шооласына O дон баштап n жолу удаалаш өлчөп коюп, $OK=na$ кесиндисин алабыз.

Демек, кесиндинин санга көбөйтүндүсүнүн узундугун табыш үчүн ал кесиндинин узундугун берилген санга көбөйтүү керек. Каалагандай a кесиндисин сызып алып, $n=3$ үчүн түзүүнү өз алдынарча аткарып көргүлө.

Эми AB жана CD кесиндилеринин айырмасын табалы ($AB>CD$ болсун) OM шооласына O дон баштап, $OE=AB$ жана $OP=CD$ кесиндилерин циркулдун жардамы менен өлчөп койсок (33-сүрөт), $OE=OP+PE$ же $PE=OE-OP=AB-CD$ (3.1) болот. Демек, AB жана CD кесиндилеринин айырмасын табууга болот, ал PE кесиндисине барабар, анын узундугу жогорудагыга окшош табылат.



33-сүрөт.



34-сүрөт.

$ABCDE$ сынык сызыгынын узундугун (34-сүрөт) табуу талап кылынсын, кесиндилердин суммасын табуунун негизинде, OM шооласына O дон баштап AB, BC, CD, DE кесиндилеринин ар бирине барабар болгон кесиндилерди удаалаш өлчөп коюп, $OL=AB+BC+CD+DE$ кесиндисине ээ болобуз. Бул кесиндинин узундугу берилген сынык сызыктын узундугун аныктайт. Демек, сынык сызыктын узундугун табыш үчүн анын ар бир кесиндисинин узундугун кошуу керек.

13. Түз сызыкта A чекитинен баштап $AB=4{,}6$ см; $BC=2{,}9$ см кесиндилери удаалаш өлчөнүп коюлган. а) AC кесиндисинин узундугун тапкыла. б) A, B, C чекиттеринин кайсынысы калган экөөнүн ортосунда жатат (жатпайт)?

14. Узундугу 4,5 м болгон устундан 2,7 м узундуктагы бөлүгүн кесип алды. Калган бөлүгүнүн узундугун тапкыла.

15. $AB=20$ м узундуктагы кесиндиге, анын A учунан $AC=5$ м, B учунан $BD=7{,}9$ м кесиндини өлчөп коюшту. CD кесиндисинин узундугун тапкыла.

16. 15-маселеде $AB=6{,}8$ м, $AC=1{,}8$ м, $BD=3{,}5$ м болсо, анда CD кесиндисинин узундугун тапкыла.

17. A, B, C үч чекити бир түз сызыкта жатат: $AB=x$, $AC=x-2$. B чекити A жана C чекиттеринин арасында жатабы?

18. A, B, C үч чекити бир түз сызыкта жатат. A чекити B жана C чекиттеринин арасында жатат. $AB=x$, $AC=x+4{,}5$, $BC=6{,}7$. AB жана AC кесиндилеринин узундуктарын тапкыла.

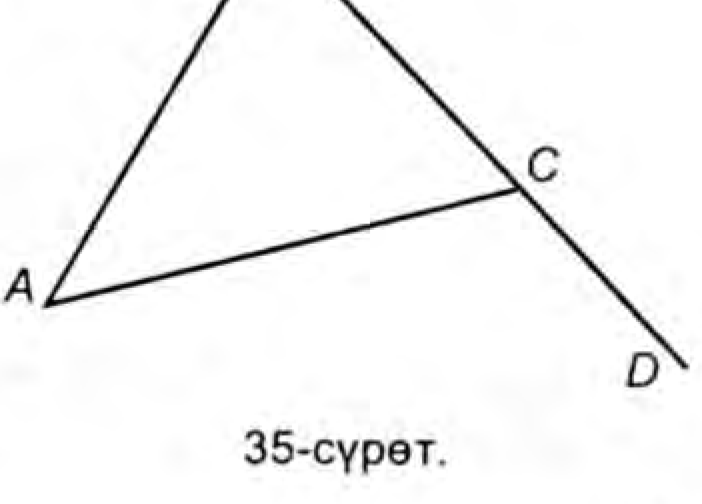
19. C, D жана M чекиттери бир түз сызыкта жатат. M чекити C жана D чекиттеринин арасында жатат. $CM=a+1$, $DM=a+2$ ($a>0$). CD кесиндисинин узундугу 3 төн чоң болоорун далилдегиле.

20. Эгерде a жана b берилген кесиндилердин узундуктары $(a>b)$ болсо, циркулду жана сызгычты колдонуп, узундугу: а) $OA=2a+4b$; б) $OB=2a-b$ болгон кесиндини OM шооласында түзгүлө.

21. ABD жана ACD сынык сызыктарынын (35-сүрөт) кайсынысы чоң?

Көрсөтмө: $AB+BC>AC$ шартын пайдалангыла.

22. $ABCDE$ сынык сызыгы берилген (36-сүрөт). а) Анын ар бир кесиндисин өлчөгүлө. б) Сынык сызыктын узундугун тапкыла.



35-сүрөт.

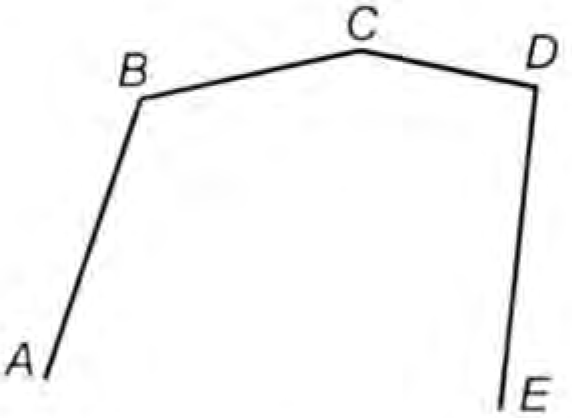
в) Ал кесиндилерди OM шооласына O дон баштап удаалаш өлчөп койгула. г) Натыйжада алынган кесиндини өлчөп, б) учурундагы натыйжа менен салыштыргыла.

23. 37-сүрөттө Ош – Бишкек – Каракол – Нарын маршруту боюнча автотуристтик жүрүүнүн схемасы ОБКН сынык сызыгы аркылуу көрсөтүлгөн. Мында О – Ош, Б –Бишкек, К – Каракол, Н – Нарын, ОБ=590 км, БК=400 км, КН=355 км. Маршруттун узундугун тапкыла. Эгерде турист ОБН маршруту (БН=350 км) боюнча жүрсө, анда ОБКН аралыгы канча километрге кыскарат?

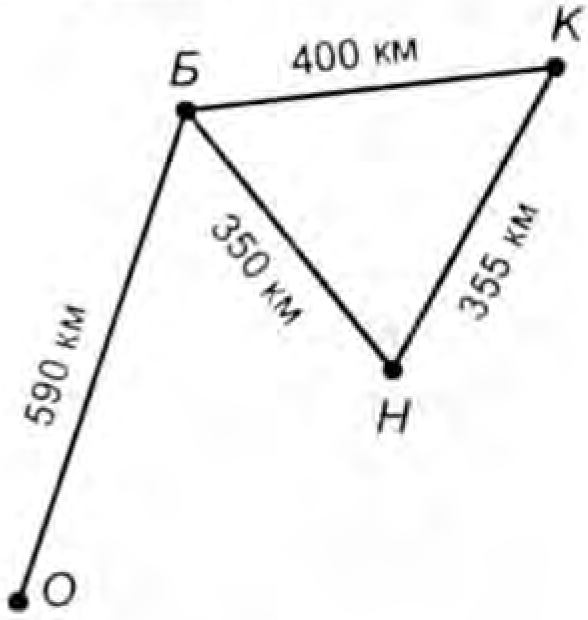
24. Эгерде: а) AB=4,6 см, BC=7,4 см, AC=10 см; б) AB=6 см, BC=8,5 см, AC=8,5 см; в) AB=6,5 см, BC=25 см, AC=40 см болсо A, B, C чекиттери бир түз сызыкта жатышабы?

25. Аралыктары ED=4,5 см, DF=3,2 см, EF=8 см болгондой кылып D, E, F чекиттерин белгилеп алууга болобу?

26. a жана b түз сызыктары A чекитинде кесилишет. Ал түз сызыктардын ар бирине A дан баштап узундугу m ге барабар кесиндини өлчөп коюшту. Өлчөнүп коюлган кесиндинин учтары болуп эсептелген ар бир эки чекит аркылуу түз сызыктар жүргүзүлгөн. Канча түз сызык алынды?



36-сүрөт.



37-сүрөт.

§ 4. БУРЧ. БУРЧТУН ТҮРЛӨРҮ

4.1. БУРЧ ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

Шоола жана тегиздиктин түз сызык аркылуу бөлүктөргө бөлүнүшү жөнүндөгү түшүнүктөрдөн пайдаланып бурчту аныктоого болот.

Аныктама. **Бир чекиттен чыгуучу эки шоола менен чектелген тегиздиктин бөлүгү бурч деп аталат.**

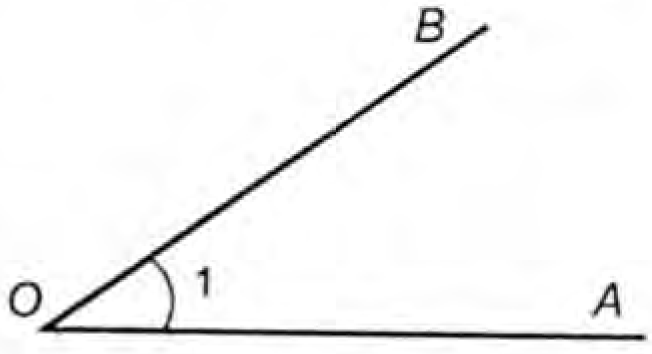
O чекитинен чыгуучу *OA* жана *OB* шоолаларынан түзүлгөн (38-сүрөт) бурчту *AOB* бурчу деп айтабыз. Бурч деген сөздү ыңгайлуу болсун үчүн «$\angle$» деп белгилейбиз. Демек, *AOB* бурчу дегенди кыскача $\angle AOB$ түрүндө белгилеп жазабыз. Мында *OA*, *OB* шоолалары **бурчтун жактары,** *O* чекити **бурчтун чокусу** деп аталат. Демек, бурчту үч тамга менен белгилеп жазганда, ортосундагы тамга бурчтун чокусун билдирет. Бурчту чокусундагы бир тамга же цифра аркылуу да белгилешет: $\angle O$ же $\angle 1$.

PQN бурчу берилсин (39-сүрөт). *QF* шооласы учтары *QP* жана *QN* жактарында жаткан *AB* кесиндисин *D* чекитинде кесип өтсө, анда *QF* шооласы *QP* жана *QN* шоолаларынын арасында жатат, башкача айтканда $\angle PQN$ нун ичинде жатат деп эсептелет. Бул учурда *PQF* жана *FQN* бурчтары жанаша жатышат, ал эми *QF* шооласы аларга жалпы жак болуп эсептелет. Ошондуктан аларды жанаша жаткан бурчтар деп эсептейбиз. Демек, бир жагы жалпы жак болгон эки бурч **жанаша жаткан бурчтар** деп аталат.

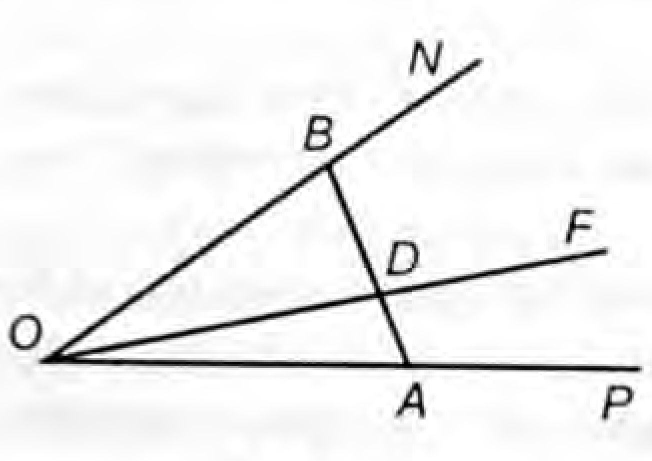
AB түз сызыгы берилсин (40-сүрөт). Бул түз сызыктан *O* чекитин белгилесек, *OB* жана *OA* толуктоочу шоолаларына ээ болобуз. Жактары бир түз сызыкты түзүүчү *BOA* бурчу **жайылган бурч** деп аталат. Демек, жайылган бурчтун жактары бир түз сызыкта жатышат.

Жайылган бурчтун чокусунан чыгып, анын жактары менен дал келбеген ар кандай шоола жайылган бурчтун ичинде жатат деп эсептелет. 40-сүрөттө *OD* шооласы *BOA* жайылган бурчунун ичинде жатат. Бул учурда *BOD* жана *DOA* бурчтары жандаш бурчтар деп аталат. Демек, бир жагы жалпы жак болуп, калган эки жагы бир түз сызыкты түзүүчү жалпы чокулуу эки бурч **жандаш бурчтар** деп аталат.

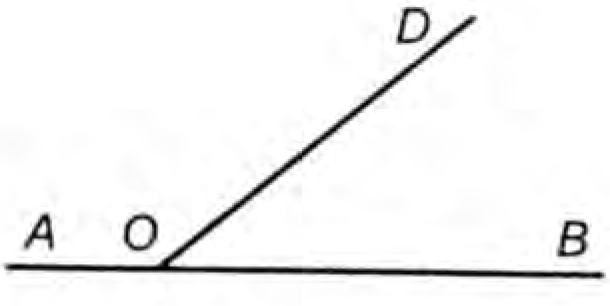
A чекитинде кесилишүүчү *a* жана *b* түз сызыктары берилсин (41-сүрөт).



38-сүрөт.



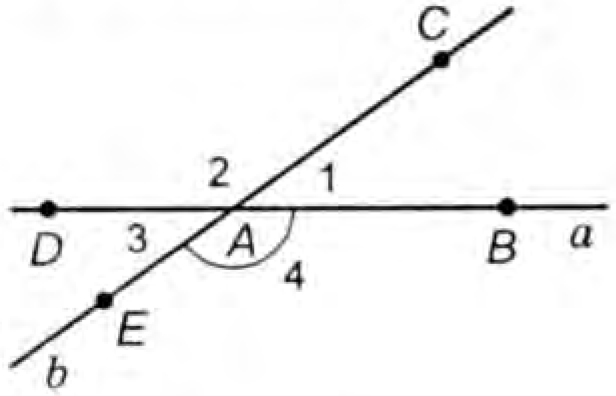
39-сүрөт.



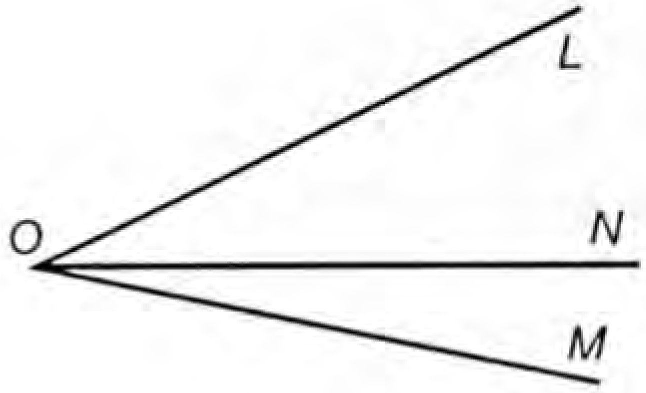
40-сүрөт.

Анда *a* түз сызыгында *AB*, *AD* шоолаларын, *b* түз сызыгында *AC*, *AE* шоолаларын белгилөөгө болот. *AB*, *AC* шоолалары $\angle 1$ ди, *AC*, *AD* шоолалары $\angle 2$ ни, *AD*, *AE* шоолалары $\angle 3$ тү жана *AE*, *AB* шоолалары $\angle 4$ тү аныктайт. Демек, эки түз сызык кесилишкенде төрт бурчту түзүшөт. Алар берилген эки түз сызыктын арасындагы бурчтар болуп эсептелет. Мында шоолалардын арасындагы бурчтарды башкача да аныктоого болот, биз ага токтолгонубуз жок. $\angle 1$ ди жана $\angle 3$ тү же $\angle 2$ ни жана $\angle 4$ тү вертикалдык (латын сөзү, жалпы чокулуу дегенди түшүндүрөт) бурчтар деп аташат. Демек, бир бурчтун жактары экинчи бурчтун жактарынын толуктоочу шоолалары болсо, анда андай бурчтар **вертикалдык бурчтар** деп аталышат. *AB* жана *AD*, *AC* жана *AE* шоолалары толуктоочу шоолалар боло тургандыгы түшүнүктүү.

41-сүрөттө *AB* менен *AC* кесиндилери *AB* жана *AC* шоолаларында жаткан кесиндилер катары каралса, анда $\angle 1$ ди *AB*, *AC* кесиндилеринин арасындагы бурч деп аташат да, аны $\angle BAC$ деп белгилешет.



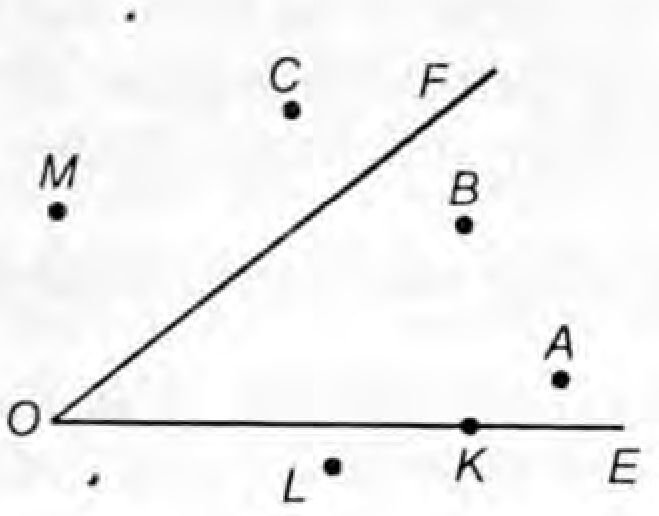
41-сүрөт.



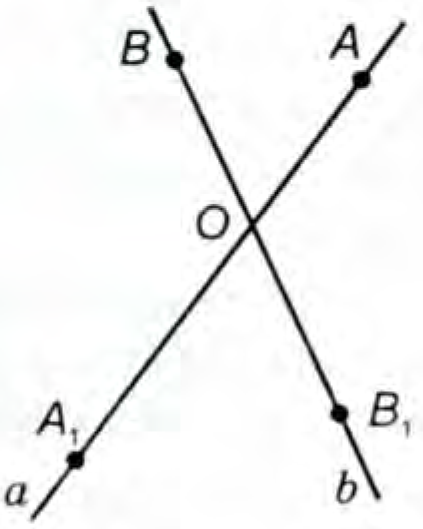
42-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. *OA*, *OB* шоолаларын сызгыла. Алар аркылуу түзүлгөн бурчту белгилеп жазгыла. Чокусун, жактарын көрсөткүлө. Ал бурчту дагы кандай белгилеп жазууга болот?
2. *OM*, *ON*, *OL* шоолалары берилген (42-сүрөт). Канча бурч түзүлдү? Ар бирин белгилеп көрсөткүлө. Жанаша бурчтарды белгилеп жазгыла.
3. *EOF* бурчу жана чекиттер берилген (43-сүрөт). Бул бурчтун: а) ичинде; б) сыртында; в) жагында жаткан чекиттерин атагыла.
4. 3-маселеде берилген ар бир эки чекитти туташтырып *AB*, *BC*, *CM*, *DK*, *AL* кесиндилерин сызгыла. *EOF* бурчунун: а) ичинде жаткан; б) сыртында жаткан; в) жактарын кесип өткөн кесиндилерди атагыла. Түшүндүргүлө.



43-сүрөт.



44-сүрөт.

5. a түз сызыгынан A, O, B чекиттерин белгилегиле. O чекити A менен B чекиттеринин арасында жатсын. OA, OB шоолалары кандай бурчту түзөт? Аны белгилеп жазгыла.
6. CO шооласы берилген. Аны менен жайылган бурчту түзгөндөй OD шооласын түзгүлө.
7. AOB жайылган бурчу берилген. OC шооласы аркылуу түзүлгөн AOC жана COB кандай бурчтар болот? Маселенин канча чыгарылышы болушу мүмкүн?
8. a жана b түз сызыктары O чекитинде кесилишет (44-сүрөт): а) канча бурч түзүлдү? б) ар бир бурчту белгилеп жазгыла; в) жайылган бурчтарды атагыла.

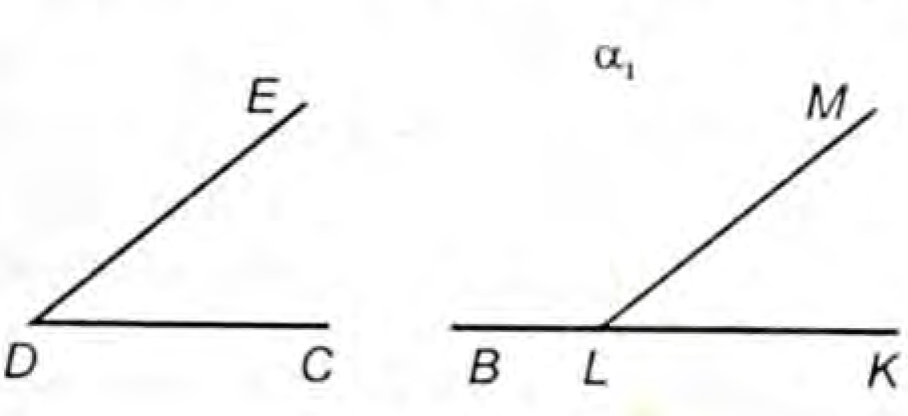
4.2. БАРАБАР БУРЧТАР. БУРЧТУН БИССЕКТРИСАСЫ

Эми бурчтардын барабардыгын карайбыз.

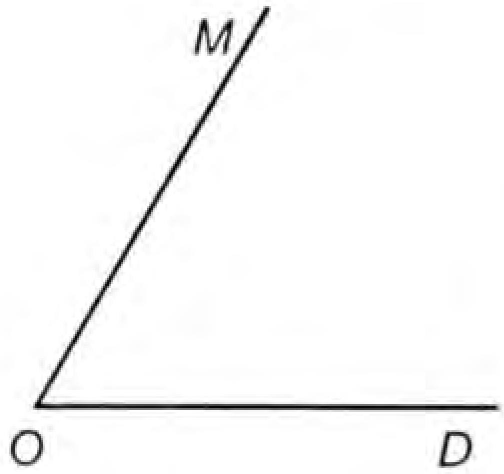
Аныктама. **Эгерде эки бурчту беттештиргенде тиешелүү жактары жана чокулары дал келишсе, анда алар барабар болушат.**

Мисалы 45-сүрөттөгү CDE жана KLM бурчтары барабар: $\angle CDE=\angle KLM$. Себеби D чокусун L чокусуна, DC жагын LK жагына дал келтиргенде DE жагы LM жагына дал келет.

LK шооласына толуктоочу LB шооласын сызабыз. Анда LM шооласы BK түз сызыгы аркылуу бөлүнгөн жарым тегиздиктердин биринде, мисалы, α_1 жарым тегиздигинде жатат. Бул түшүнүк CDE бурчуна барабар болгон бурчту түз сызык аркылуу бөлүнгөн жарым тегиздиктердин бирине чокусу ал түз сызыкта жаткан шоойладан баштап өлчөп коюуга (түзүүгө) мүмкүн экендигин аныктайт. Демек, бурч бе-



45-сүрөт.



49-сүрөт.

Бурчтун чоңдугун өлчөө үчүн атайын курал колдонулат. Аны **транспортир** деп аташат.

Берилген DOM бурчун (49-сүрөт) транспортир аркылуу өз алдынарча өлчөгүлө. Канча градус болду?

Жайылган бурчтан кичине болгон ар кандай бурчту транспортир менен өлчөөгө болот, б. а. градус аркылуу туюнтууга мүмкүн. Демек, ар бир бурч нөлдөн чоң болгон градустук ченге ээ болот. Эми бурчтарды чоңдуктары боюнча салыштырууга мүмкүн.

Эгерде эки бурчтун градустук чендери барабар болсо, анда ал бурчтар барабар болушат.

ABC бурчу ABD жана DBC бурчтарынын суммасынан (50-сүрөт) турса, б. а. $\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC$ болсо, ABD жана DBC бурчтарынын градустук чендеринин суммасы ABC бурчунун градустук ченине барабар. Мисалы, $\angle ABD=49°$, $\angle DBC=73°$ болсо, $\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=49°+73°=122°$. Эми бурчтарды градустук чендери боюнча мүнөздөөгө болот.

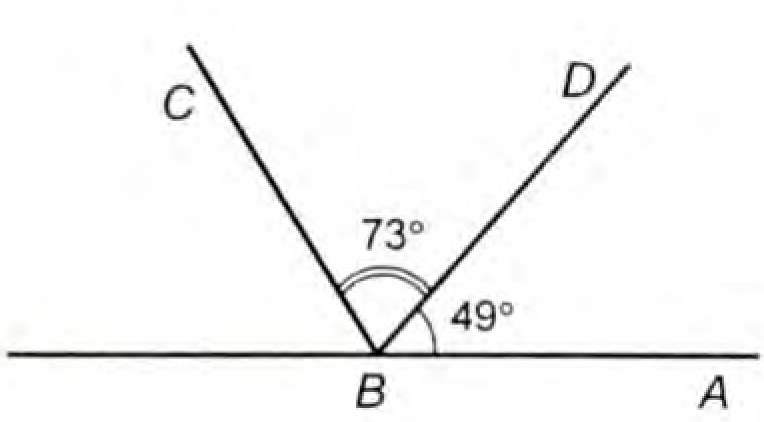
Чоңдугу 90° тан кичине, бирок 0° тан чоң болгон бурчту **тар бурч** дейбиз.

Чоңдугу 90° тан чоң, бирок 180° тан кичине болгон бурчту **кең бурч** дейбиз.

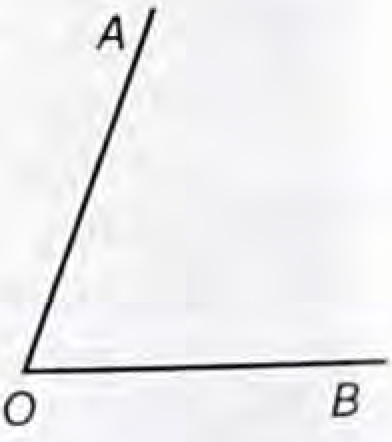
Транспортирдин жардамы менен бурчтардын чоңдугун гана өлчөбөстөн, бурчтун градустук чени берилген учурда аны түзүүгө да болот. Мисалы, 51-сүрөттө $\angle AOB=70°$ бурчун түзүү каралган. Түшүндүрүп бергиле.

Ошентип, бурчтардын барабардыгы, аларды өлчөөнүн негизинде бурчтарды өлчөөнүн негизги касиеттери келип чыгат. Алар III группаны түзүшөт.

III_3. Ар бир бурч нөлдөн чоң болгон белгилүү бир градустук ченге ээ болот. Жайылган бурч 180° ка барабар.



50-сүрөт.



51-сүрөт.

III$_4$. Эгерде *OC* шооласы *AOB* бурчунун чокусунан чыгып, анын жактарынын арасында жатса, анда *AOB* бурчу *AOC* жана *COB* бурчтарынын суммасына барабар.

Жогоруда кесиндинин узундугун өлчөөнү сызгычтын же циркулдун жардамы менен бирдик кесиндини удаалаш өлчөп коюу аркылуу ишке ашырдык. Ошондой эле берилген узундуктагы кесиндини шоолага башталыш чекитинен өлчөп коюуга мүмкүн экендигин көрдүк. Бурчтун чоңдугун өлчөөдө да, транспортирдин жардамы менен бурчтун бирдигин берилген шоолалардан баштап берилген жарым тегиздикте удаалаш өлчөп коюп градустук ченин таптык. Берилген бурчка барабар болгон бурчту түзүүгө мүмкүн экендигин көрдүк. Бул түшүнүктөрдүн негизинде кесиндилерди жана бурчтарды өлчөп коюунун негизги касиеттерин баяндоого болот. Ал төртүнчү группадагы аксиомаларды түзөт.

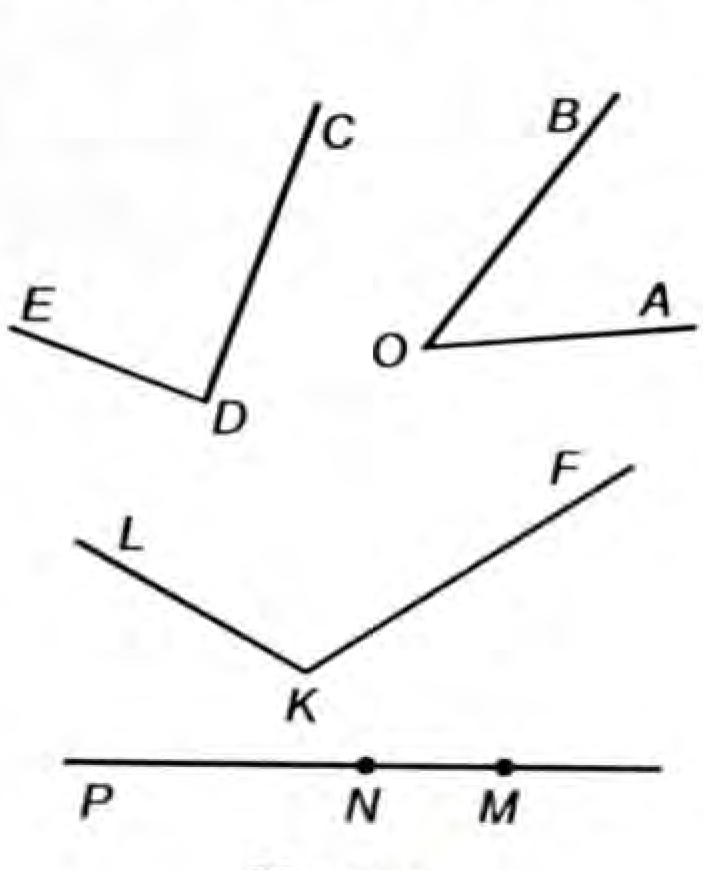
IV$_1$. Ар кандай шоолага анын башталыш чекитинен тартып берилген *x* узундуктагы кесиндини бир гана жолу өлчөп коюуга болот.

IV$_2$. Градустук чени 180°тан кичине болгон бурчту берилген жарым тегиздикте берилген шоололадан баштап бир гана жолу өлчөп коюуга болот.

Бул аксиомалардан чыгуучу корутундулар жана алардын теоремаларды далилдөөдө колдонулуштары кийинки параграфтарда каралат.

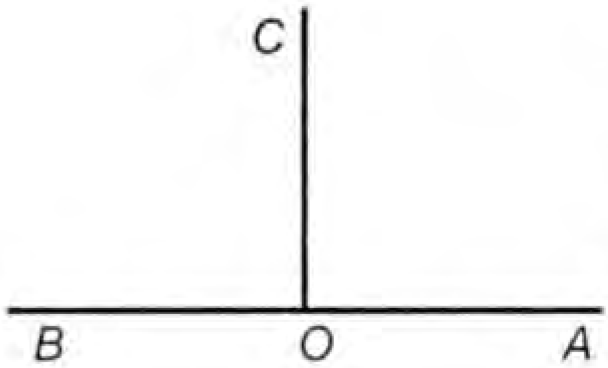
Демек, узундугу белгилүү болгон кесиндини шоолага башталыш чекитинен баштап бир гана жол менен өлчөп коюуга болот. IV$_2$ негизги касиети да ушундай эле талкууланат. Транспортирди колдонуп 30°; 45°; 60°; 90°; 135° бурчтарды түзгүлө.

17. 52-сүрөттө көрсөтүлгөн бурчтарды транспортир менен өлчөгүлө: а) Аларды белгилеп, тиешелүү маанилерин жазгыла. б) Алардын кайсынысы тар, кайсынысы тик, кайсынысы кең жана кайсынысы жайылган бурч?



52-сүрөт.

18. *AOB* жайылган бурч (53-сүрөт). *AB* түз сызыгына карата аныкталган жарым тегиздиктердин биринде $\angle AOC=90°$ тик бурчун түзгүлө. а) $\angle COB=90°$ болоорун далилдегиле; б) *OC* шооласы жаткан жарым тегиздикте $\angle AOD$ —



53-сүрөт.

тар, $\angle AOE$ — кең бурч болгондой OD, DE шоолаларын сызгыла. в) AOD, AOE бурчтарын өлчөп, натыйжаларын тик бурч менен салыштыргыла. Кандай корутундуларды айта аласыздар?

19. 1) 18°, 2) 92°, 3) 109°, 4) 90°, 5) 180° бурчтарынын кайсынысы тар, тик, кең жана жайылган бурч болот?

20. $\angle AOB=42°$, $\angle BOC=28°$ жанаша бурчтар болсо, AOC бурчун тапкыла.

21. 20-маселеде $\angle AOC=104°$, $\angle AOB=80°$ болсо, $\angle BOC$ бурчун тапкыла.

22. Жандаш бурчтардын суммасы 180° болоорун далилдегиле.

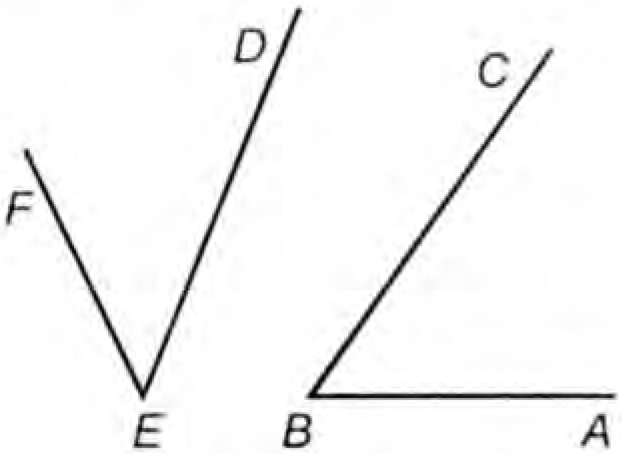
23. Жандаш бурчтардын бири: 1) 45°; 2) 120°; 3) 18° болсо, экинчисин тапкыла.

4.4. БУРЧТАР МЕНЕН АТКАРЫЛУУЧУ АМАЛДАР

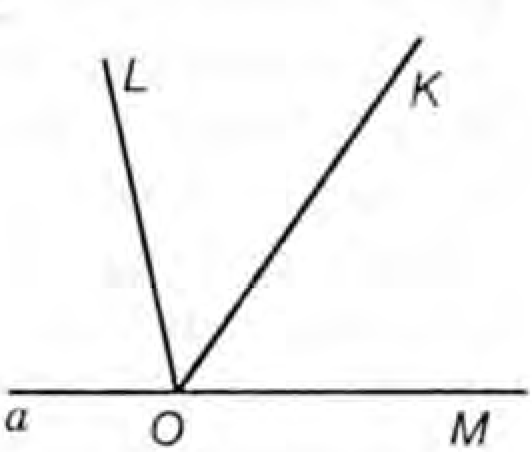
Кесиндилер менен аткарылуучу амалдардай эле, бурчтарды да кошууга жана кемитүүгө, бурчту санга көбөйтүүгө болот.

ABC жана DEF бурчтары (54-сүрөт) берилсин. Алардын суммасын табабыз. Ал үчүн a түз сызыгын алып, OM шооласын белгилейбиз. a түз сызыгы аркылуу бөлүнгөн жарым тегиздиктердин бирине OM шооласынан баштап, транспортирдин жардамы менен $\angle MOK=\angle ABC$ жана $\angle KOL=\angle DEF$ бурчтарын түзөбүз (55-сүрөт). Анда $\angle MOL=\angle MOK+\angle KOL=\angle ABC+\angle DEF$ болот. Демек, $\angle MOL$ берилген бурчтардын суммасына барабар. Анын туралыгына III_4 негизги касиети аркылуу ишенүүгө болот. Ошентип, бурчтардын суммасынын чоңдугун табыш үчүн алардын чоңдуктарынын суммасын табуу керек. Бурчтардын айырмасынын чоңдугу да ушуга окшош аныкталат.

Эгерде $\angle 1$ берилсе, аны n эсе чоңойтуу же аны n ге көбөйтүү үчүн бурчтардын суммасын табуу түшүнүгүнө таянабыз. a түз



54-сүрөт.



55-сүрөт.

сызыгы аркылуу аныкталган жарым тегиздиктердин бирине OM шооласынан баштап 1 бурчун n жолу удаалаш өлчөп коюп, $\angle MON=n\cdot\angle 1$ бурчун алабыз. Демек, MON бурчунун чоңдугун табыш үчүн $\angle 1$ бурчунун чоңдугун n ге көбөйтүү керек. Эгерде $\angle 1=15°$, $n=8$ болсо, $\angle MON=8\cdot\angle 1$ бурчунун чоңдугун өз алдынарча эсептегиле.

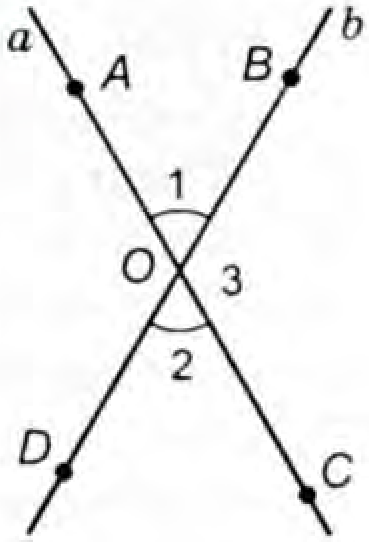
Теореманын далилденишин мүнөздөп көрсөтүү максатында төмөндөгү 2-теореманын далилдөөсүнө толук токтолобуз.

2-теорема. **Вертикалдык бурчтар барабар болушат.**

Берилди: 1 жана 2 вертикалдык бурчтары (56-сүрөт).

Далилденсин[1] : $\angle 1=\angle 2$ экендиги.

Далилдөө : Вертикалдык бурчтар эки түз сызыктын кесилишинен пайда болот. a жана b түз сызыктары O чекитинде кесилишсин. $\angle 1$ жана $\angle 2$ вертикалдык бурчтар. COA — жайылган бурч, анда III_3 аксиомасынын негизинде $\angle COA=180°$ болот. Бирок, $\angle 3+\angle 1=\angle COA$ же $\angle 3+\angle 1=180°$. $\angle 1=180°-\angle 3$ (1) деп жаза алабыз. Ошондой эле b түз сызыгына карата $\angle DOB=180°$ же $\angle 2+\angle 3=180°$ же $\angle 2=180°-\angle 3$ (2). (1) жана (2) барабардыктардын оң жактары барабар, анда $\angle 1=\angle 2$ болот. Теорема далилденди.



56-сүрөт.

25. Жандаш бурчтардын суммасын тапкыла.

26. $\angle AOB=70°$ бурчунун OC биссектрисасы жүргүзүлгөн. AOC жана COD бурчтарын тапкыла, аларды салыштыргыла. Кандай бурчтар?

27. Жандаш бурчтар барабар болсо, анда алар тик бурчтар болоорун далилдегиле.

28. Эки түз сызыктын кесилишинде пайда болгон бурчтардын бири 50° болсо, калган бурчтарын тапкыла. Мында жандаш, жайылган бурчтарды көрсөткүлө.

29. Вертикалдык бурчтардын биссектрисалары бир түз сызыкты түзөт. Далилдегиле.

30. Жандаш бурчтардын биссектрисаларынын арасындагы бурч 90° ка барабар. Далилдегиле.

31. AOB бурчу берилген. Эгерде AOB бурчу: а) жайылган; б) жайылган эмес болсо, $\angle AOC+\angle COB=\angle AOB$ (1) болгондой OC шооласын түзгүлө. OC шооласы OA шооласына жана анын

---

[1] Мындан ары теоремаларды далилдөөдө, тексти кыскача баяндоо максатында *берилди, далилденсин* деген сөздөрдү жазып отурбайбыз.

толуктоочусуна карата кандай жарым тегиздикке тиешелүү болот? Андай шоолалардан канчаны жүргүзүүгө мүмкүн?
Көрсөтмө: (1) барабардык *OC* шооласы *OA* жана *OB* шоолаларынын арасында гана жатканда аткарылат.

32. Амалдарды аткаргыла, натыйжаларын чиймеде көрсөткүлө: 1) $30° + 45°$; 2) $18°17' + 11°43'$; 3) $120° - 30°$ 4) $98° - 17°30'$; 5) $11°15' \cdot 4$; 6) $61°30' \cdot 2$.

33. а) $2°$; $15°$; $1{,}5°$; $8°17'$ бурчтары берилген. Аларды минуталар аркылуу туюнтуп жазгыла; б) $240'$; $30'$; $360'$ бурчтарынын ар бирин градус аркылуу туюнтуп жазгыла.

34. $30°$; $45°$; $60°$; $15°$ бурчтарынын ар бири: а) тик бурчтун; б) жайылган бурчтун кандай бөлүгүн түзөт?

35. а) Тик бурчтун; б) жайылган бурчтун $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{6}$ бөлүгү канча градустук бурчту түзөт?

36. Жандаш бурчтардын бири $48°$ болсо, экинчисин тапкыла.

37. Жандаш бурчтардын бири экинчисинен: 1) $64°$ ка чоң; 2) $56°$ ка кичине; 3) 3 эсе чоң; 4) 2 эсе кичине болсо, ал бурчтарды эсептегиле.

38. Эки түз сызыктын кесилишинен түзүлгөн эки бурчтун: а) суммасы $70°$; б) бири экинчисинен 3 эсе чоң; в) бири экинчисинен $35°$ ка кичине болсо, ал бурчтарды тапкыла.

39. Эгерде: а) $\angle AOB=20°$; $\angle BOC=50°$ болсо, *AOC* бурчун тапкыла. *OB* шооласы кайсы шоолалардын арасында, б. а. кайсы бурчтун ичинде жатат?; б) $\angle AOC=60°$; $\angle BOC=35°$ болсо, *AOB* бурчун эсептегиле.

40. *AB* түз сызыгынан *C* чекити алынып, ал чекиттен *ACD* бурчу *BCD* бурчунан 4 эсе чоң болгондой кылып *CD* шооласы жүргүзүлгөн. Ал бурчтарды тапкыла.

41. Берилген бурч менен *ABC* бурчунун суммасы эки тик бурчту түзгөндөй бурчту түзгүлө.
Көрсөтмө: *B* чекитинен *BA* же *BC* шооласына толуктоочу шоола жүргүзгүлө.

42. 47-сүрөттө берилген бурчтарга карата төмөндөгү жазуулар туура болсун үчүн жылдызчанын ордуна > же < белгилеринин кайсынысын коюуга болот:
а) $\angle AOD * \angle AOC$; б) $\angle AOE * \angle AOB$ в) $\angle AOE * \angle AOC$.

43. Жанаша жаткан *AOB*, *BOC*, *COD* жана *DOE* бурчтарынын улам кийинкиси мурункусунан $10°$ чоң болуп, *OA* жана *OE* шоолалары бир түз сызыкты түзөт. Ал бурчтарды тапкыла жана түзгүлө.

44. Берилген бурчтун жана ага жандаш жаткан эки бурчтун суммасы $2\frac{3}{8}d$ га (мында $d=90°$) барабар. Берилген бурчту тапкыла.

45. Транспортирди жана сызгычты пайдаланып, берилген: а) a жагы боюнча квадратты; б) a, b жактары боюнча тик бурчтукту түзгүлө.

4.5. БОРБОРДУК БУРЧТАР

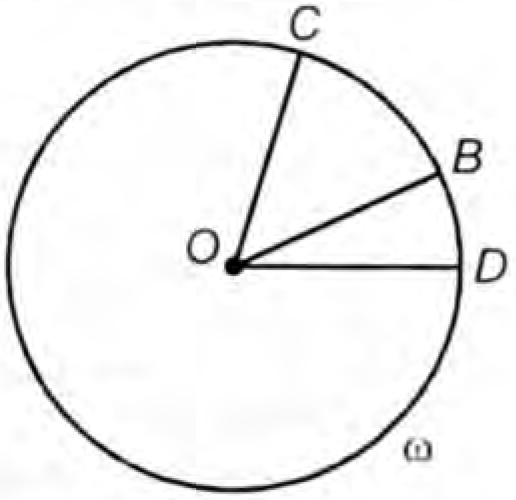
$\omega(O; r)$ айланасы берилсин (57-сүрөт).

Айлананын эки радиусунун арасындагы бурч **борбордук бурч** деп аталат. OB жана OC радиустарынын арасындагы BOC бурчу борбордук бурч болот.

Борбордук бурчтун жактары айлананы эки жаага бөлөт. Алардын бири борбордук бурчтун ичинде жатат ($\breve{BC}$), ошондуктан ал жаа берилген борбордук бурчка туура келүүчү жаа болот.

Демек, $\breve{BC}$ жаасы $\angle BOC$ борбордук бурчуна туура келүүчү жаа деп аталат. Тескерисинче, $\breve{BC}$ жаасына $\angle BOC$ борбордук бурчу туура келет. Борбордук бурч градустук ченге ээ болгондуктан, ага туура келүүчү жаа да ошондой градустук ченге ээ болот деп эсептелет. Мисалы, $\angle BOC=48°$ болсо, анда $\breve{BC}=48°$ деп жазабыз. Натыйжада $\angle BOC=\breve{BC}$ болот (бир эле айланада). Демек толук айлананын бурчтук чени 360° ка барабар болот, анткени айлананын толук борбордук бурчу 360° ка барабар.

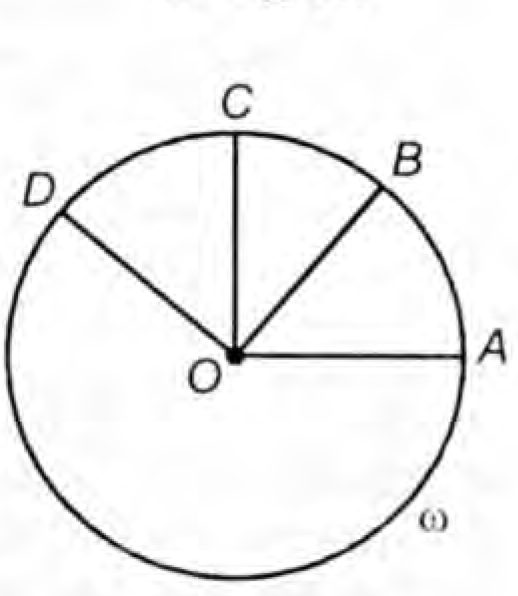
Эгерде айланага OD радиусун жүргүзсөк, анда $\angle DOB+\angle DOC=\angle BOC$ болот. Натыйжада $\breve{DB}+\breve{DC}=\breve{BC}$ деп айта алабыз. Демек, эки борбордук бурчтун суммасына барабар болгон борбордук бурчка туура келүүчү жаа ал борбордук бурчтардын жааларынын суммасына барабар болот.



57-сүрөт.

3-теорема. **Эгерде айланада берилген эки борбордук бурч барабар болушса, анда аларга туура келүүчү жаалар да барабар болушат.**

Далилдөө: $\omega(O; r)$ айланасы (58-сүрөт) берилсин. $\angle AOB$, $\angle COD$ борбордук бурчтар болушсун. Анда аларга туура келүүчү жаалар $\breve{AB}$ жана $\breve{CD}$ болушат. Теореманын шарты боюнча $\angle AOB=\angle COD$ болгондуктан, OA, OB шоолаларын тиешелүү түрдө OC, OD шоолаларына дал келгендей кылып беттештирүүгө болот (4.2). Мында A чекити C чекитине, B чекити D чекитине



58-сүрөт.

дал келет, анткени $OA=OC$, $OB=OD$ (бир эле айлананын радиустары). Ошондой эле AB, CD жааларынын ар бир чекити O борборунан бирдей алыстыкта. Ошондуктан бул беттештирүүдө AB жаасы CD жаасына дал келет, анда барабар фигуралардын аныктамасынын негизинде $\overset{\smile}{AB}=\overset{\smile}{CD}$ болот. Теорема далилденди.

Натыйжа: **Эгерде айланада эки жаа барабар болсо, анда аларга туура келүүчү борбордук бурчтар да барабар болушат.**

46. $\omega(O; r)$ айланасын сызгыла. Айланада C жана D чекиттерин белгилегиле. $\overset{\smile}{CD}$ жаасына туура келүүчү борбордук бурчту түзүп аны белгилегиле.
47. Айлананын а) жарымына; б) алтыдан бир бөлүгүнө туура келүүчү борбордук бурчтун чоңдугун тапкыла.
48. Айлананын борбордук бурчтары $\angle AOB=45°$, $\angle BOC=60°$ болсо, аларга туура келүүчү AB, BC жана $\overset{\smile}{AC}$ жааларынын бурчтук чендерин тапкыла.
49. Эгерде $\omega(O; r)$ айланасында $\overset{\smile}{AB}=\overset{\smile}{CD}$ болсо, анда аларга туура келүүчү борбордук бурчтар барабар болоорун далилдегиле.
50. Жарым айлана: а) 3; б) 4; в) 6; г) 18 барабар бөлүккө бөлүнгөн. Ар бир жаанын градустук ченин жана ага туура келүүчү борбордук бурчтун чоңдугун тапкыла.

I ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Негизги түшүнүктөрдү атагыла.
2. Бир чекит аркылуу канча түз сызык өтөт?
3. Эки чекит аркылуу канча түз сызык өтөт?
4. I_1, I_2 негизги касиеттерин айтып бергиле.
5. Түз сызыкта канча чекит бар?
6. Эки түз сызык канча чекитте кесилиши мүмкүн? Кесилишпей калышы мүмкүнбү?
7. II_1, II_2 негизги касиеттерди айтып бергиле.
8. Кесинди кандай аныкталат?
9. Шооланы кандай аныктоого болот?
10. Башталышы бир чекит болгон канча шооланы сызууга болот?
11. Кандай эки шоола толуктоочу шоолалар болушат?
12. II_3 негизги касиетти айтып, түшүндүрүп бергиле.
13. Бурчту аныктагыла. Кандай бурч жайылган бурч болот?
14. Жандаш бурчтарды, вертикалдык бурчтарды аныктагыла.
15. Геометриялык фигурага аныктама бергиле.
16. Кандай фигуралар барабар болушат?
17. Чекиттердин геометриялык ордун аныктагыла.
18. Кандай кесиндилер (бурчтар) барабар болушат?
19. Бурчтун биссектрисасын аныктагыла.
20. Тик, тар, кең бурчтарга аныктама бергиле.
21. III_1, III_2 негизги касиеттерди атагыла.

22. Бурчтун бирдигин атагыла. Тик, жайылган бурчтар эмнеге барабар?

23. III_3, III_4 негизги касиеттерди айтып, түшүндүрүп бергиле.

24. IV_1, IV_2 негизги касиеттерди баяндагыла.

25. Айланага аныктама бергиле. Анын радиусун, диаметрин жана жаасын түшүндүргүлө.

26. Айлананын борбордук бурчун, хордасын кандай аныктоого болот?

27. Кандай эки айлана барабар болушат?

28. Кандай түз сызык айланага жаныма деп аталат?

29. Теореманы кандай математикалык сүйлөм деп атоого болот?

I ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. *a* түз сызыгы жана анда жатуучу *A, B, C, D* чекиттери ушул жазылгандай иреттүүлүктө берилген. Ал чекиттердин кайсынысы 1) *A* жана *C*; 2) *B* жана *D*; 3) *A* жана *D* чекиттеринин арасында жатат?

2. 1-маселеде: 1) *a* түз сызыгында канча кесинди алынды? 2) *AD* кесиндиси кандай кесиндилердин суммасынан турат? 3) *BD* кесиндисичи?

3. 1-маселедеги *a* түз сызыгында: 1) башталышы *A, B, C, D* чекиттери болгон канча шооланы алууга болот? 2) Канча толуктоочу шоолалар бар?

4. Сааттын жебелери 8ден 9га чейин канча жолу тик бурчту, канча жолу жайылган бурчту түзүшөт?

5. *OC* шооласы *AOB* тик бурчунун ичинде жатат. *AOC* бурчу *COB* бурчунан 5 эсе чоң болсо, ал бурчтардын чондуктарын тапкыла.

6. Жандаш бурчтардын бири экинчисинен 8 эсе кичине болсо, ал бурчтардын чондуктарын тапкыла.

7. Жандаш бурчтардын бири экинчисинен 40° ка кичине болсо, ал бурчтарды тапкыла.

8. $\angle AOB=110^\circ$, $\angle AOC=160^\circ$. Эгерде *OB* жана *OC* шоолалары *OA* шооласы жаткан түз сызык аркылуу бөлүнгөн жарым тегиздиктердин: а) биринде; б) ар түрдүүсүндө жатса, *BOC* бурчун тапкыла.

9. $AB=8$ см кесиндиси берилген. $\omega_1(A;5\text{ см})$ жана $\omega_2(B;5\text{ см})$ айланалары *C* жана *D* чекиттеринде кесилишет. $AC+BC=$ $=AD+BD$ болоорун далилдегиле.

10. Айланада чоңдуктары 60° жана 80° болгон борбордук бурчтар берилген. Аларга туура келүүчү жаалардын суммасынын жана айырмасынын градустук чендерин тапкыла.

11. Айланада $\breve{BC}=20^\circ$ берилген. Мында $\breve{BD}=7\cdot\breve{BC}$ тапкыла. Ал айлананын *BOD* борбордук бурчун эсептегиле.

II глава ПАРАЛЛЕЛЬ ТҮЗ СЫЗЫКТАР

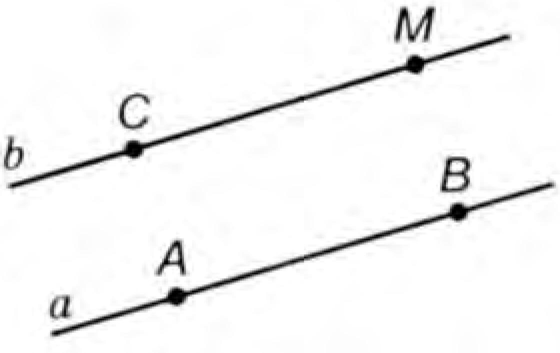
§ 5. ПАРАЛЛЕЛЬ ТҮЗ СЫЗЫКТАРДЫН АНЫКТАЛЫШЫ

Тегиздикте жаткан эки түз сызык бир чекитте кесилишет же кесилишпей калышы да мүмкүн (§ 1). Тегиздикте жаткан эки түз сызык кесилишпесе, алар параллель[1] түз сызыктар деп аталышат.

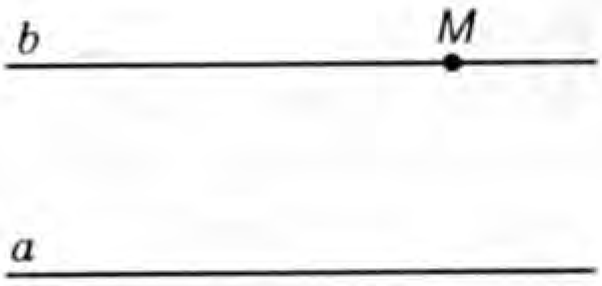
59-сүрөттө бири-бирине параллель болгон a жана b түз сызыктары көрсөтүлгөн. Параллель деген сөздү кыскача «$\|$» түрүндө белгилейбиз. Анда параллель түз сызыктар $a\|b$ деп жазылат. Параллель түз сызыктарда жаткан кесиндилер, шоолалар да параллель болушат деп эсептелет. Анда $a\|b$ түз сызыктарында жаткан AB жана CM кесиндилери, ошондой эле AB жана CM шоолалары параллель болушат: $AB\|CM$ (же AB шооласы CM шооласына параллель).

Тегиздикте M чекити аркылуу өтүүчү чексиз көп түз сызыктар болот (§ 1). Анда M чекити аркылуу өтүүчү жана берилген a түз сызыгына параллель болгон канча түз сызык бар деген суроо туулат.

Эки кырдуу сызгычты колдонуп да параллель түз сызыктарды сызууга болот. M чекити берилсин (60-сүрөт). Сызгычтын бир кырын M чекити менен дал келгендей кылып коюп, анын эки кыры аркылуу a, b түз сызыктарын сызсак, анда $a\|b$ болот. Мында b түз сызыгы M чекити аркылуу өтөт. Демек, M



59-сүрөт.



60-сүрөт.

---

[1] Гректин «параллелос» деген сөзүнөн алынган, «катар жүрүүчү» дегенди түшүндүрөт.

чекити аркылуу өтүүчү жана кандайдыр бир *a* түз сызыгына параллель болгон түз сызык болот же *a* түз сызыгынан тышкары жаткан *M* чекити аркылуу өтүп, берилген түз сызыкка параллель болгон *b* түз сызыгы табылат. Бул түшүнүктү жалпы учур үчүн негиздөөгө жана жогорудагы суроого төмөндөгү негизги касиет (аксиома) жооп берет. Ал аксиомалардын V группасын түзөт.

V. Тегиздикте берилген түз сызыктан тышкары жаткан чекит аркылуу өтүүчү жана ал түз сызыкка параллель болгон бир гана түз сызык болот. Бул параллелдиктин аксиомасы деп аталат. Демек, *M* чекити аркылуу (60-сүрөт) берилген *a* түз сызыгына параллель болгон бир гана *b* түз сызыгы өтөт.

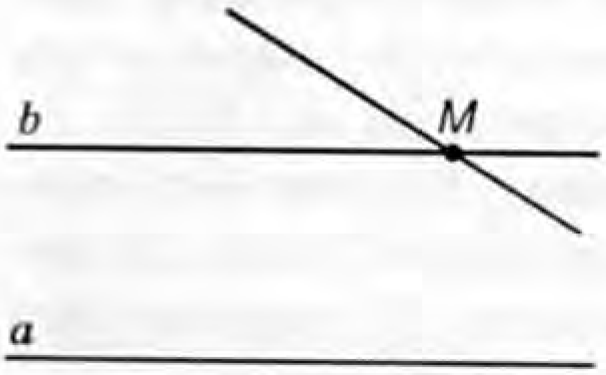
4-теорема. **Эгерде кандайдыр бир түз сызык параллель эки түз сызыктын бирин кесип өтсө, анда ал экинчисин да кесип өтөт.**

Далилдөө. $a \| b$ түз сызыктары берилсин (61-сүрөт). *c* түз сызыгы *b* түз сызыгын *M* чекитинде кесип өтсүн. *c* түз сызыгы *a* түз сызыгын да кесип өтөөрүн далилдейбиз.

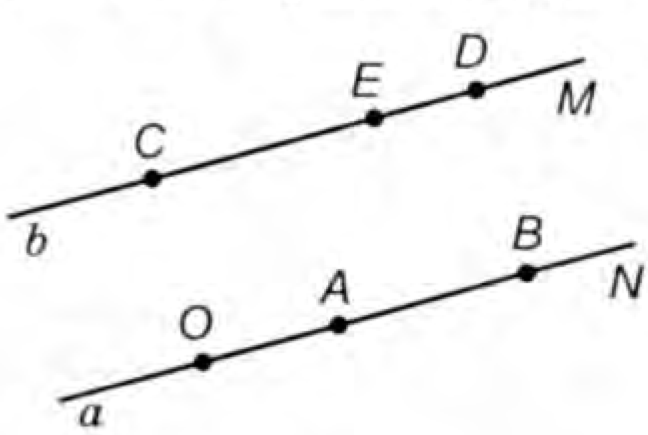
Тескерисинче, *c* түз сызыгы *a* түз сызыгы менен кесилишпейт деп эсептейли. Анда $c \| a$ болот. Натыйжада *M* чекити аркылуу *a* түз сызыгына параллель болгон эки түз сызык (b, c) өтүп калат. Бул V негизги касиетке карама-каршы. Демек, *c* жана *a* түз сызыктары кесилишет. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. *l* түз сызыгы жана андан тышкары жаткан *M* чекити берилген. *M* чекити аркылуу өтүүчү: а) *l* түз сызыгын кесип өтүүчү *a*, *b* түз сызыктарын; б) *l* түз сызыгына параллель болгон *c* түз сызыгын сызгыла.
2. Параллель түз сызыктарга турмуштан мисалдар келтиргиле.
3. $a \| b$ түз сызыктары берилген (62-сүрөт). Ал түз сызыктарда *AB*, *CD*, *ED* кесиндилерин жана *ON*, *OF*, *FM* шоолаларын белгилегиле. Параллель кесиндилерди жана параллель шоо-



61-сүрөт.



62-сүрөт.

лаларды атагыла. Алар эмне үчүн параллель? Дагы кандай параллель кесиндилер (шоолалар) бар?

4. a, b, c түз сызыктарында $a\|c$, $b\|c$ болсо, анда $a\|b$ болот. Далилдегиле. (Мында $\|$ белгиси параллель дегенди түшүндүрөт).

5. a түз сызыгы жана андан тышкары жаткан A чекити берилген. A чекити аркылуу өтүүчү үч түз сызыктын жок дегенде экөө a түз сызыгын кесип өтөт. Далилдегиле.
Көрсөтмө. Параллель түз сызыктардын аксиомаларынан пайдалангыла.

6. l түз сызыгын сызып, андан тышкары жаткан A, B чекиттерин белгилегиле. Ал чекиттердин ар бири аркылуу l түз сызыгына параллель түз сызыктар жүргүзгүлө. Ал түз сызыктар кандай жайланышат?

7. a, b түз сызыктары берилип, $a\|b$ болсо, анда $b\|a$ болобу? Түшүндүргүлө.

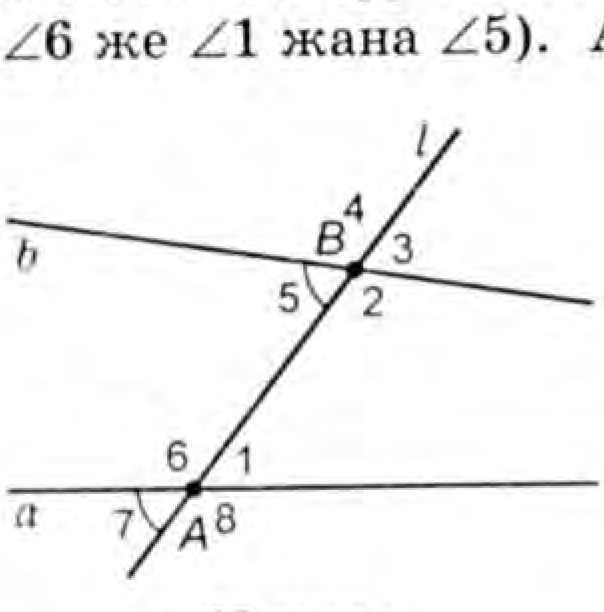
8. a жана b түз сызыктары бир чекитте кесилишет. Алардын ар бирине параллель болгон түз сызык болобу? Канча? Түшүндүргүлө.

9. a, b, c түз сызыктары берилип, $a\|b$ жана b, c түз сызыктары кесилишет. a жана c түз сызыктары да кесилишээрин далилдегиле.

§ 6. ТҮЗ СЫЗЫКТАРДЫН ПАРАЛЛЕЛДИК БЕЛГИЛЕРИ

a жана b түз сызыктарын l сызыгы A, B чекиттеринде кесип өтсүн (63-сүрөт). Анда алар сегиз бурчту түзүшөт. Алар сүрөттө цифралар аркылуу белгиленип көрсөтүлгөн. Бул учурда l түз сызыгын кесүүчү деп атайбыз. Ал бурчтарды төмөндөгүдөй атоо кабыл алынган. a жана b түз сызыктарынын арасында болуп, l кесүүчү түз сызыгына карата ар кандай жарым тегиздиктерде жаткан эки бурч **ички кайчылаш бурчтар** деп аталат. ($\angle 2$ жана $\angle 6$ же $\angle 1$ жана $\angle 5$). Анда $\angle 3$ жана $\angle 7$ же $\angle 4$ жана $\angle 8$ **тышкы кайчылаш бурчтарды** түзүшөт.

a жана b түз сызыктарынын арасында болуп, l кесүүчүсүнө карата бир жарым тегиздикте жаткан эки бурч ($\angle 1$ жана $\angle 2$ же $\angle 5$ жана $\angle 6$) **ички бир жактуу бурчтар** деп аталышат. Анда $\angle 3$ менен $\angle 8$ же $\angle 4$ менен $\angle 7$ **тышкы** бир жактуу бурчтар болушат.



63-сүрөт.

Бири a жана b түз сызыктарынын арасында, экинчиси аларга карата сыртында болуп, l кесүүчү бөлгөн жарым тегиздиктердин биринде жаткан эки бурч **туура келүүчү бурчтар** деп аталышат ($\angle 1$ жана $\angle 3$, же $\angle 6$ жана $\angle 4$, же $\angle 2$ жана $\angle 8$, же $\angle 5$ жана $\angle 7$).

Төмөндөгү эки теорема түз сызыктардын параллелдигинин белгилерин мүнөздөйт.

5-теорема. **Эгерде эки түз сызыктын ар бири үчүнчү түз сызыкка параллель болсо, анда ал эки түз сызык өз ара параллель болушат.**

Далилдөө: $a \parallel c$, $b \parallel c$ түз сызыктары берилген (64-сүрөт). $a \parallel b$ боло тургандыгын далилдейбиз.

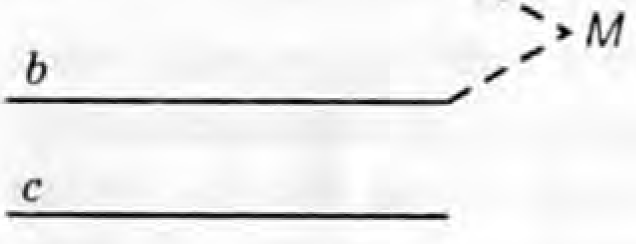
Тескерисинче, a жана b түз сызыктары M чекитинде кесилишет деп эсептейли. Анда M чекити аркылуу c түз сызыгына параллель болгон эки түз сызык (a, b) өтүп калат. Бул V негизги касиетине каршы болот. Ошондуктан, $a \parallel b$ болот. Теорема далилденди.

6-теорема. **Эки түз сызыкты үчүнчү түз сызык менен кескенде ички кайчылаш бурчтары барабар болсо, анда ал эки түз сызык параллель болушат.**

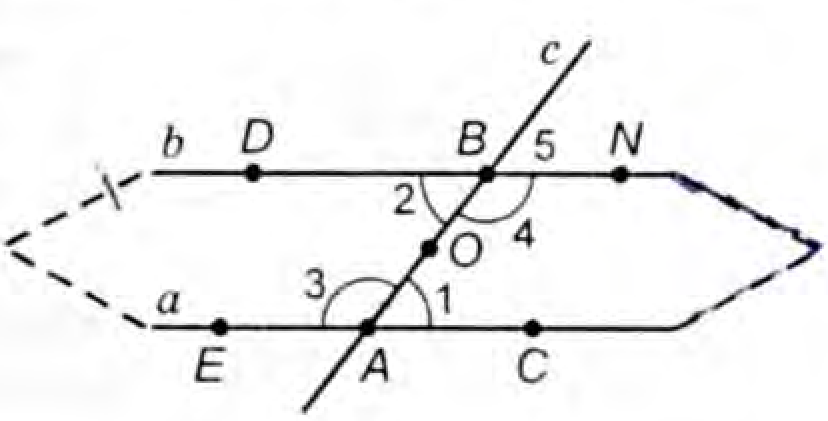
Далилдөө: a, b түз сызыктарын c түз сызыгы тиешелүү түрдө A, B чекиттеринде кесип өтсүн (65-сүрөт). Эгерде $\angle 1$, $\angle 2$, ички кайчылаш бурчтары барабар болсо, анда $a \parallel b$ болоорун далилдейбиз. AB кесиндисинин ортосун O чекити аркылуу белгилейли.

a жана b түз сызыктары параллель эмес, тескерисинче, алар P чекитинде кесилишет деп эсептейли.

Барабар фигураларды бири-бирине беттештирүүгө болот (2.2.). $\angle 1 = \angle 2$ жана $OA = OB$ болгондуктан, аларды бири-бирине дал келгендей кылып беттештирүүгө мүмкүн. Ошол максатта a, b, c түз сызыктарын O чекитинин айланасында 180° ка бурсак, б.а. O борборуна карата симметриялуу чагылдырсак, анда A жана B чекиттери, AO жана OB, AC жана BD, AE жана BN шоолалары, ошону менен бирге a жана b түз сызыктары орундарын алма-



64-сүрөт.



65-сүрөт.

шып калышат. Анда AC жана BN шоолаларынын кесилишинде жаткан P чекити $BD\ (AC)$ жана $AE\ (BN)$ шоолаларынын кесилишинде жаткан Q чекитине өтөт. Натыйжада a жана b түз сызыктары P, Q эки чекитинде кесилишип калышат, б. а. P, Q эки чекити аркылуу бири-бирине дал келбеген a, b эки түз сызыгы өтөт. Бул I_2 негизги касиетине каршы. Ошондуктан, a, b түз сызыктары кесилишпейт, демек параллель болушат. Теорема далилденди.

Теорема $\angle 3$, $\angle 4$ ички кайчылаш бурчтары үчүн да туура болоору түшүнүктүү. Анткени $\angle 1=\angle 2$ болгондо $\angle 3=\angle 4$ болот. Чындыгында эле, $\angle 1+\angle 3=180°$, $\angle 2+\angle 4=180°$. Мындан $\angle 3=180°-\angle 1$, $\angle 4=180°-\angle 2$.

Акыркы барабардыктардын оң жактары барабар, анда алардын сол жактары да барабар, б. а. $\angle 3=\angle 4$ болот.

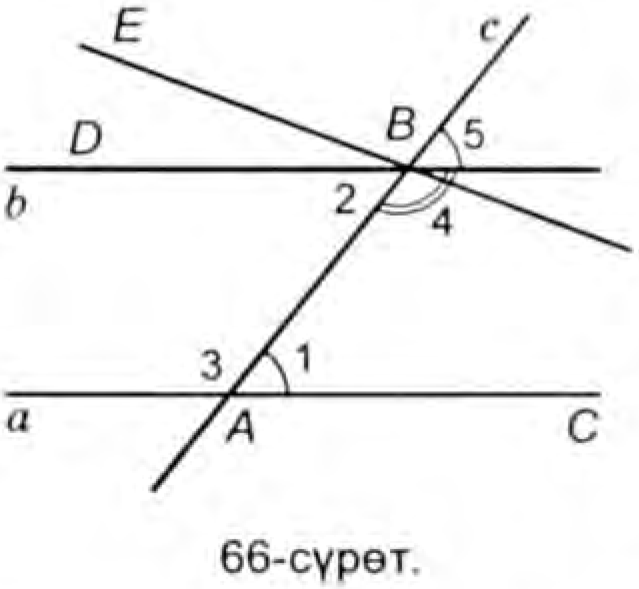
7-теорема. **Эгерде эки түз сызыкты үчүнчү түз сызык менен кескенде: а) ички бир жактуу бурчтардын суммасы 180° ка барабар болсо; б) туура келүүчү бурчтары барабар болсо, анда берилген эки түз сызык параллель болушат.**

Бул теоремаларды 6-теореманын жардамы менен жеңил эле далилдөөгө болот.

Далилдөө. а) теореманы $\angle 1$ жана $\angle 4$ ички бир жактуу бурчтары үчүн (65-сүрөт) далилдейли. Шарт боюнча $\angle 1+\angle 4=180°$, бирок $\angle 2+\angle 4=180°$. Акыркы эки барабардыктан $\angle 1=\angle 2$ болот. Бул учур үчүн 6-теорема туура. Демек, $\angle 1+\angle 4=180°$ болгондо $a \parallel b$ болот.

б) $\angle 1$ жана $\angle 5$ туура келүүчү бурчтары үчүн далилдейли. Шарт боюнча $\angle 1=\angle 5$ болоору белгилүү, ошондой эле вертикалдык бурчтар болгондуктан $\angle 2=\angle 5$. Натыйжада $\angle 1=\angle 2$ болот. Бул учур 6-теорема үчүн туура. Ошондуктан $\angle 1=\angle 5$ болгондо да теорема туура болот, б. а. $a \parallel b$.

8-теорема. **Эки параллель түз сызыкты үчүнчү түз сызык менен кескенде ички кайчылаш бурчтары барабар болот (6-теоремага тескери теорема).**



66-сүрөт.

Эскертүү. Эгерде теореманын шарты менен корутундусунун ордун алмаштырсак, анда берилген теоремага тескери теорема келип чыгат.

Далилдөө. $a \parallel b$ түз сызыктары берилсин (66-сүрөт). c түз сызыгы аларды кесип өткөндө пайда болгон ички кайчылаш бурчтар $\angle 1$ жана $\angle 2$ болсун. $\angle 1=\angle 2$ болоорун далилдейбиз.

Тескерисинче, $\angle 1 \neq \angle 2$ деп эсептейли. Анда *a* түз сызыгына карата аныкталган жарым тегиздиктердин *BD* шооласы жаткан жарым тегиздигинде $\angle 1 = \angle ABE$ болгондой *BE* шооласы табылат (4.2). Анда 6-теореманын негизинде $BE \parallel a$ болуп калат. Натыйжада *B* чекити аркылуу *a* түз сызыгына параллель болгон эки түз сызык (*b* жана *BE*) өтөт. Бул V негизги касиетке каршы болот. Ошондуктан $\angle 1 = \angle 2$ болот. Теорема далилденди.

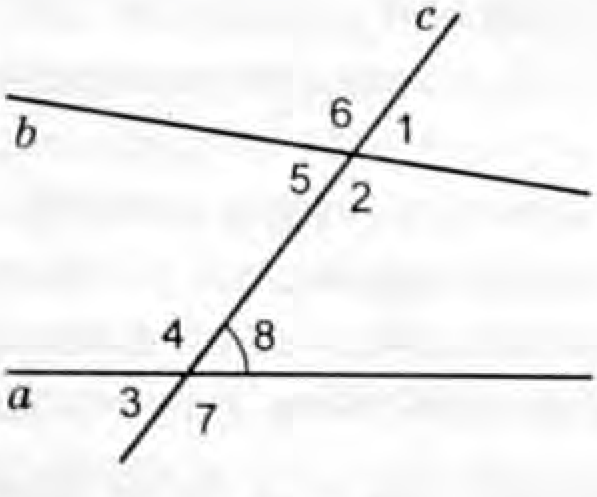
9-теорема. **Параллель эки түз сызыкты үчүнчү түз сызык менен кескенде: а) ички бир жактуу бурчтардын суммасы 180° ка барабар болот; б) туура келүүчү бурчтары барабар болот** (7-теоремага тескери теорема).

Бул теореманын далилдениши түздөн-түз 8-теоремадан келип чыгат. 9-теореманын эки учурун тең далилдөөнү өз алдынарча иштөөгө сунуш кылабыз.

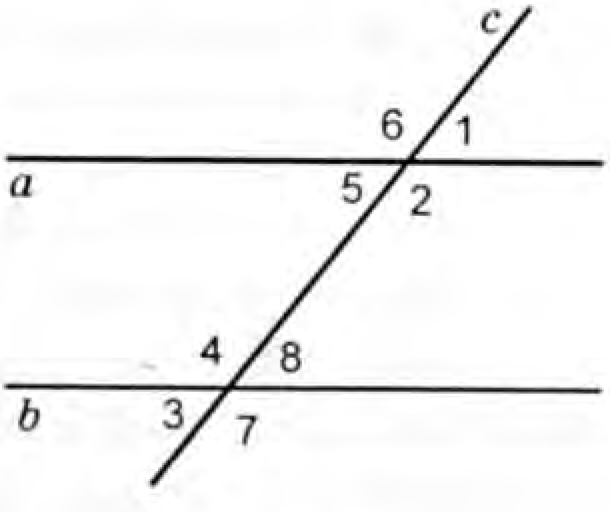
КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Каалагандай *a* жана *b* түз сызыктарын *c* түз сызыгы кесип өткөндө сегиз бурч пайда болот (67-сүрөт). Ал бурчтар цифралар аркылуу белгиленип көрсөтүлгөн. Эгерде: а) $\angle 2 = 95°$, $\angle 4 = 100°$ болсо, анда $\angle 5$ жана $\angle 8$ бурчтарды; б) $\angle 2 + \angle 8 = 160°$ болсо, $\angle 5 + \angle 4$ суммасын; в) $\angle 4 - \angle 5 = 15°$ болсо, $\angle 2 - \angle 8$ айырмасын тапкыла.
2. *a* жана *b* түз сызыктары параллель, ал эми *c* түз сызыгы аларды кесип өтөт (68-сүрөт). Кесилишиндеги бурчтарга карата төмөндөгүлөрдү далилдегиле: 1) $\angle 1 = \angle 3$; 2) $\angle 1 = \angle 8$; 3) $\angle 6 = \angle 7$; 4) $\angle 7 + \angle 1 = 180°$.

   Көрсөтмө. Түз сызыктардын параллелдик белгилерин, вертикалдык бурчтардын барабардыгын пайдалангыла.
3. Эки параллель түз сызыкты үчүнчү түз сызык менен кескенде пайда болгон сегиз бурчтун бири 65° ка барабар. Калган бурчтардын ар бирин тапкыла.



67-сүрөт.



68-сүрөт.

4. a, b, параллель түз сызыктары c түз сызыгы менен кесилишет. Ички бурчтардын бири 123° ка барабар. Ал бурчтун биссектрисасы экинчи түз сызыкты кандай бурч менен кесет?

5. Эки параллель түз сызык үчүнчү түз сызык менен кесилген. Берилген ички бурчтун, ага бир жактуу ички бурчтун жана берилген ички бурчка вертикалдык бурчтун суммасы 240° ка барабар. Берилген бурчка туура келүүчү бурчту тапкыла.

6. c түз сызыгы AB түз сызыгын E чекитинде, ал эми CD түз сызыгын F чекитинде кесип өтөт. Эгерде: а) $\angle AEF=90°$ жана $\angle BEC=90°$ болсо; б) B жана D чекиттери c түз сызыгынын бир жагында жатып, $\angle BEF=86°47'$ жана $\angle EFD=93°13'$ болсо, AB жана CD түз сызыктары параллель болушабы?

7. 1-маселеде: 1) $\angle 6=92°$, 2) $\angle 2=30°$ болсо, a жана b түз сызыктары параллель болсун үчүн $\angle 8$ ту кандай өзгөртүү керек?

8. Параллель түз сызыктарды үчүнчү бир түз сызык кесип өткөндө пайда болгон ички кайчылаш (же туура келүүчү) бурчтардын биссектрисалары параллель болоорун далилдегиле.

9. Параллель эки түз сызыкты үчүнчү түз сызык менен кескенде пайда болгон ички бир жактуу бурчтардын айырмасы 40° ка барабар. Ал бурчтарды тапкыла.

10. 9-теореманын а) учурун далилдегиле.

11. 9-теореманын б) учурун далилдегиле.

§ 7. ПЕРПЕНДИКУЛЯРДУУ ТҮЗ СЫЗЫКТАР. ПЕРПЕНДИКУЛЯР ЖАНА ЖАНТЫК

Тегиздикте эки түз сызык ар кандай жайланышы мүмкүн. AB жана CD түз сызыктары O чекитинде кесилишип, бири-бири менен тик бурчту түзсүн (69-сүрөт). Анда $\angle BOD=90°$ болот. Бул жайылган бурчтун жарымы болгондуктан, $\angle DOA=90°$, $\angle COB=90°$ боло тургандыгы белгилүү. Ошондой эле, $\angle AOC=90°$ ка барабар болот. Бул учурда AB жана CD түз сызыктары перпендикуляр[1] болушат.

Аныктама. **Тик бурч боюнча кесилишүүчү эки түз сызык перпендикулярдуу түз сызыктар деп аталат.**

Перпендикулярдуу деген сөздү кыскача «⊥» деп белгилеп жазабыз. Анда «AB түз сызыгы CD түз сызыгына перпендику-

---

[1] Латындын *«перпендикулярис»* деген сөзүнөн алынган. *«Тик сызык»* дегенди түшүндүрөт.

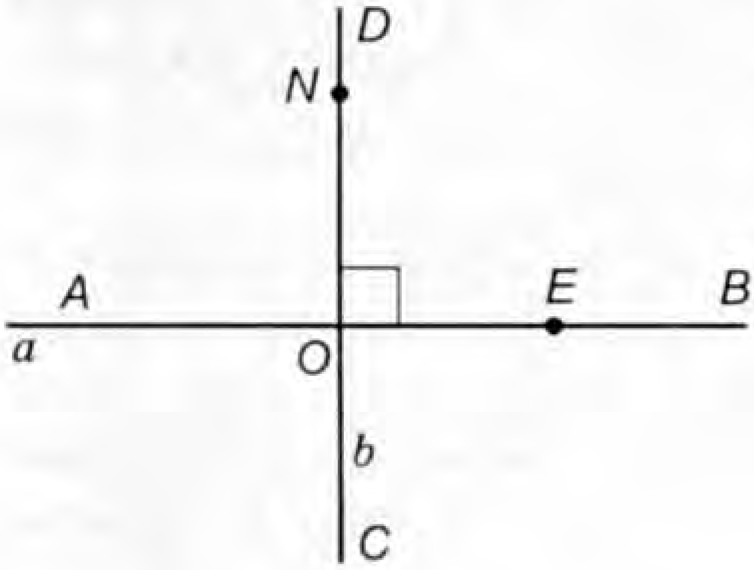
лярдуу» дегенди кыскача $AB\perp CD$ деп жазабыз. Айрым учурда AB, CD түз сызыктарын бир эле a, b тамгалары менен белгилеп, алардын перпендикулярдуу болушун $a\perp b$ түрүндө да жазууга болот.

Перпендикулярдуу түз сызыктарда жаткан кесиндилер да, шоолалар да перпендикулярдуу болушат. Анда 69-сүрөттөгү OB жана OD шоолалары, ошондой эле OE, ON кесиндилери перпендикулярдуу деп эсептелет.

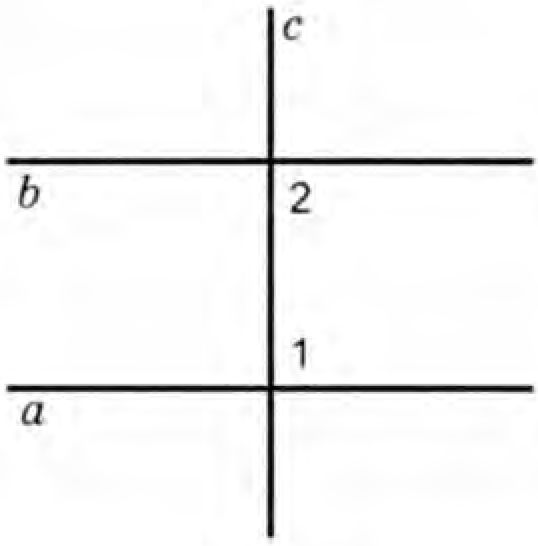
Перпендикулярдуу түз сызыктардын касиеттери

10-теорема. **Бир түз сызыкка перпендикулярдуу эки түз сызык параллель болушат.**

Далилдөө: $a\perp c$ жана $b\perp c$ болгон a, b, c түз сызыктары берилген (70-сүрөт). $\angle 1=90°$, $\angle 2=90°$ жана $\angle 1$ менен $\angle 2$ ички бир жактуу бурчтар: $\angle 1+\angle 2=180°$. Анда 7-теореманын негизинде $a\|b$ болот. Теорема далилденди.



69-сүрөт.



70-сүрөт.

11-теорема. **Эгерде түз сызык параллель түз сызыктардын бирине перпендикулярдуу болсо, анда ал экинчисине да перпендикулярдуу болот.**

Теореманы өз алдыңарча далилдегиле (далилдөөдө 4-, 5-теоремаларды пайдаланууну сунуш кылабыз).

12-теорема. **Берилген түз сызыктын каалагандай чекити аркылуу өтүп, ага перпендикулярдуу болгон бир гана түз сызыкты жүргүзүүгө болот.**

Далилдөө. a түз сызыгы берилсин (71-сүрөт). Ал түз сызыктан каалагандай O чекитин алабыз. a түз сызыгы аркылуу аныкталган жарым тегиздиктеринин бирине OA шооласынан баштап $\angle AOC=90°$ болгон бурчту өлчөп коебуз. Анда $OC\perp OA$ болот. Натыйжада OC шооласына толуктоочу OD шооласын түзсөк, b түз сызыгы аныкталат. Демек, $b\perp a$ болот.

Эми O чекити аркылуу өтүүчү жана a түз сызыгына перпендикулярдуу болгон бир гана b түз сызыгы болоорун көрсөтөбүз. OC шооласы жаткан жарым тегиздикте $OC_1 \perp OA$ болгондой дагы бир OC_1 шооласы бар деп эсептейли, ал $b_1 \perp a$ түз сызыгын аныктайт. Анда $\angle AOC_1 = 90°$ болот. Бирок, IV_2 аксиомасы боюнча берилген жарым тегиздикте OA шооласынан баштап 90° ка барабар болгон бир гана бурчту өлчөп коюуга болот. Натыйжада OC_1 шооласы OC шооласына же b_1 түз сызыгы b түз сызыгына дал келип калат.

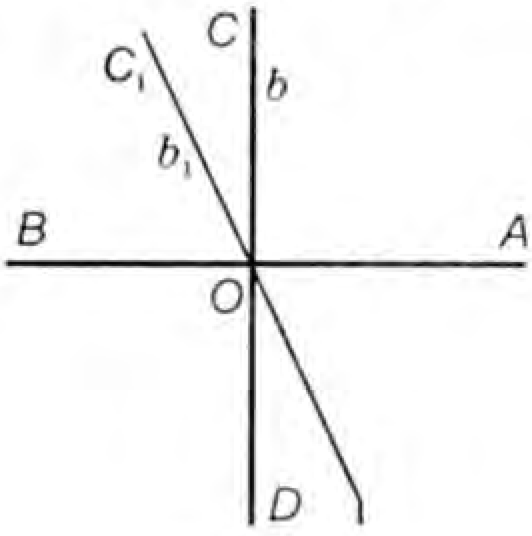
Демек, a түз сызыгынын каалагандай O чекити аркылуу өтүп, ага перпендикуляр болгон бир гана b түз сызыгы болот. Теорема далилденди.

13-теорема. **Түз сызыктан тышкары жаткан чекит аркылуу ага перпендикулярдуу болгон бир гана түз сызыкты жүргүзүүгө болот.**

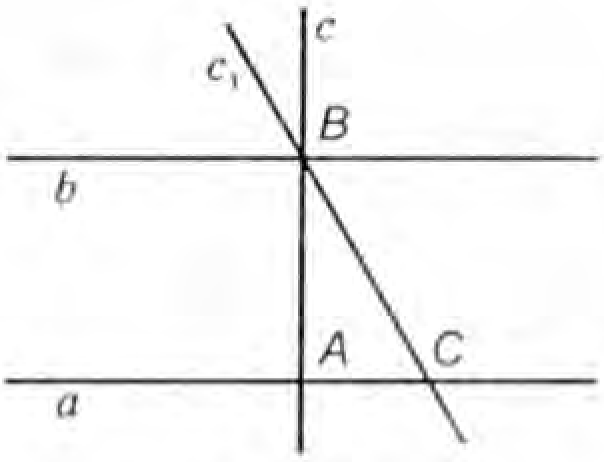
Далилдөө: a түз сызыгы, андан тышкары жаткан B чекити берилсин (72-сүрөт). B чекити аркылуу a түз сызыгына параллель болгон b түз сызыгын жүргүзөбүз. B чекити аркылуу $b \perp c$ түз сызыгын жүргүзөбүз (12-теорема). Анда $c \perp a$ болуп, алар A чекитинде кесилишет (4-, 11-теоремалар).

B чекити аркылуу өтүүчү жана a түз сызыгына перпендикулярдуу болгон бир гана c түз сызыгы болот. Тескерисинче, дагы бир c_1 түз сызыгы бар деп эсептейли. Анда a түз сызыгына перпендикулярдуу болгон c, c_1 эки түз сызыктар B чекитинде кесилишип калат. Бул 10-теоремага каршы. Демек, B чекити аркылуу өтүүчү жана берилген a түз сызыгына перпендикулярдуу болгон бир гана түз сызык болот. Теорема далилденди.

B чекитинен a түз сызыгына түшүрүлгөн BA кесиндисин — **перпендикуляр**, ал эми BC кесиндисин — **жантык** деп аташат. A чекити BA перпендикулярынын негизи, C чекити BC жантыгынын негизи деп аталышат. AC кесиндиси BC жантыгынын a түз сызыгындагы проекциясы деп аталат (72-сүрөт).



71-сүрөт.



72-сүрөт.

BA кесиндисинин узундугу *B* чекитинен *a* түз сызыгына чейинки **аралык** деп да аталат.

Натыйжа. **Параллель эки түз сызыктын арасындагы аралык алардын биринин каалаган чекитинен экинчисине түшүрүлгөн перпендикулярдын узундугуна барабар. Бул натыйжанын тууралыгы 11-, 13-теоремалардан келип чыгат.**

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. *a* түз сызыгы берилген. Транспортирди колдонуп, ага перпендикулярдуу болгон *b* түз сызыгын сызгыла.
2. *a* түз сызыгы жана андан тышкары жаткан *A* чекити берилген. Чийме үч бурчтугун колдонуп, *A* чекити аркылуу өтүүчү жана *a* түз сызыгына перпендикулярдуу болгон *b* түз сызыгын түзгүлө.
3. Эгерде *A* чекити *a* түз сызыгында жатса, анда 2-маселени кандай чыгарууга болот?
4. 2-маселеде *A* чекитинен *a* түз сызыгына чейинки аралык катары кайсы кесиндинин узундугун алууга болот?
5. *a* жана *b* түз сызыктары кесилишкенден пайда болуучу бурчтардын ичинен үчөө өз ара барабар болушса, анда $a \perp b$ болоорун далилдегиле.
6. *a*, *b*, *c* түз сызыктары берилген. Эгерде $a \perp c$, $b \perp c$ болсо, *a* жана *b* түз сызыктары параллель болоорун далилдегиле. *Көрсөтмө.* Түз сызыктардын параллелдик белгисинен пайдалангыла.
7. Бир түз сызыкка жүргүзүлгөн перпендикуляр жана жантык кесилишет. Далилдегиле.
8. *l* түз сызыгын сызып, андан *A*, *B* жана *C* чекиттерин белгилегиле, Ал чекиттер аркылуу *l* ге перпендикулярдуу *AD*, *BE* жана *CF* кесиндилерин түзгүлө. а) Параллель; б) перпендикуляр кесиндилерди атагыла.
9. *ABCD* тик бурчтугу берилген. Анын: а) Карама-каршы жактары аркылуу жүргүзүлгөн түз сызыктар параллель; б) жанаша жаткан жактары аркылуу жүргүзүлгөн түз сызыктар перпендикулярдуу болоорун далилдегиле.
10. *AB*, *CD* түз сызыктары бири-бирине перпендикулярдуу жана *O* чекитинде кесилишет. *OE* жана *OF* шоолалары *OD* шооласы жаткан жарым тегиздикте жатышат. Эгерде $\angle EOF=105°$ жана $\angle BOF=28°$ болсо, *DOF* жана *EOD* бурчтарын эсептегиле.
11. $a \| b$ түз сызыктары берилген. *a* түз сызыгынын *A* жана *B* чекиттеринен *b* түз сызыгына чейинки аралыктар барабар болоорун далилдегиле.

§ 8. ТИЕШЕЛҮҮ ЖАКТАРЫ ПАРАЛЛЕЛЬ БУРЧТАР

Эки бурч берилсе, алардын тиешелүү жактары ар кандай болуп жайланышы мүмкүн. Биз төмөндө алардын өз ара параллель же перпендикулярдуу болгон учурларын карайбыз. Тиешелүү жактары параллель болуу менен бирге алар бирдей багытталып же карама-каршы багытталып калышы мүмкүн. Мында бурчтарды түзүүчү шоолалардын багыттары эсепке алынат.

14-теорема. **Тиешелүү жактары параллель болгон эки бурч барабар болушат же алардын суммасы 180° ту түзөт.**

Далилдөө. $\angle 1$ жана $\angle 2$ бурчтары берилип, алардын тиешелүү жактары параллель болсун (73-сүрөт): $a \| a_1$, $b \| b_1$. Бурчтардын чокулары O жана O_1 болот.

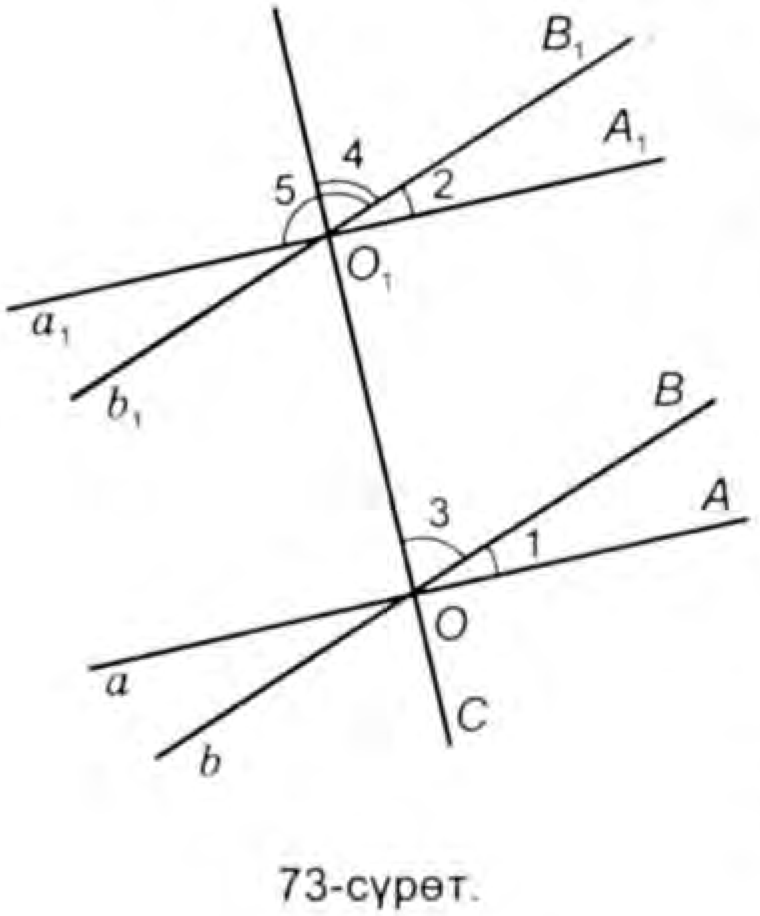
Теореманын шартын канааттандыруучу эки бурч $\angle 1$ менен $\angle 2$ же $\angle 1$ менен $\angle 5$ болот.

O, O_1 чекиттери аркылуу c түз сызыгын сызабыз.

1) $\angle 1$ жана $\angle 2$ карайлы. Мында $OA \| O_1A_1$ жана $OB \| O_1B_1$ шоолалары бирдей багытталган болсун. 7-теореманын негизинде:

$\angle 3 = \angle 4$ жана $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$, мындан $\angle 1 = \angle 2$. Теореманын 1-бөлүгү далилденди.

2) $\angle 1$ жана $\angle 5$ бурчтарды карайлы. $OA \| O_1A_1$ болуп, бирок ал шоолалар карама-каршы багытталышсын. Мында $\angle 5$ да a_1 жана b_1 түз сызыктарынын арасындагы бурчтарды аныктайт. Мында $\angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$ болоору белгилүү. Ал эми $\angle 2 = \angle 1$ болгондуктан $\angle 1 + \angle 5 = 180^\circ$ болот. Теорема далилденди.



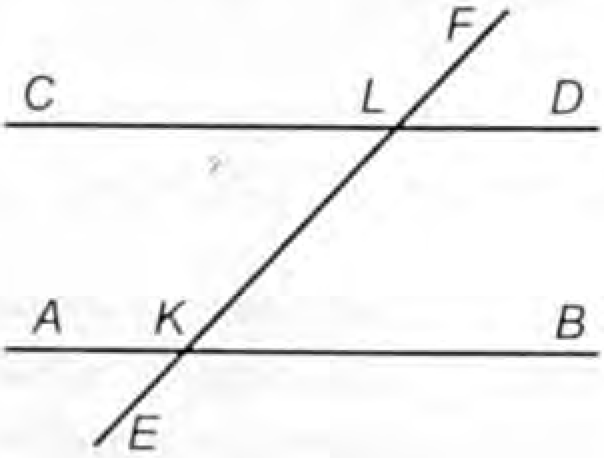
73-сүрөт.

Натыйжа: **Тиешелүү жактары бирдей (же карама-каршы) багытталган эки бурч барабар болот.**

Ушундай эле жол менен, тиешелүү жактары перпендикулярдуу болгон эки тар (кең) бурчтардын барабар болоорун да далилдөөгө болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $\angle ABC=75°$ жана $\angle BCD=125°$ бурчтары берилген. Бул бурчтардын тиешелүү BA жана CD жактары параллель боло алабы? Жообун негиздегиле.
2. $AB \parallel CD$ түз сызыктары берилген (74-сүрөт). EF түз сызыгы AB ны K, ал эми CD ны L чекитинде кесип өтөт. Тиешелүү жактары параллель жана: а) бирдей багытталган бурчтарды; б) карама-каршы багытталган бурчтарды аныктагыла жана аларды белгилеп жазгыла.
3. Тиешелүү жактары карама-каршы багытталган жана ар бири жайылган бурчтан кичине болгон эки бурч барабар болот. Далилдегиле.
4. Ар бири жайылган бурчтан кичине жана бирден жактары параллель, ал эми экинчи жактары карама-каршы багытталган эки бурчтун суммасы 180° ка барабар болоорун далилдегиле.
5. Тиешелүү жактары перпендикулярдуу болгон эки тар (кең) бурчтун барабар болоорун далилдегиле.
6. AB, AC жана KP ар түрдүү шоолалар болуп, $AB \parallel KP$ жана $AC \parallel KP$. $\angle BAC$ тапкыла.
7. $\angle AOB=52°$. Бул бурчтун ичинде жаткан D чекитинен анын жактарына параллель болгон түз сызыктар жүргүзүлгөн. Ал түз сызыктардын арасындагы бурчту жана алардын бурчтун жактары менен түзгөн бурчтарын тапкыла.
8. Жактары параллель болгон эки бурч берилген, алардын бири экинчисинен 90° ка чоң. Ар бир бурчту тапкыла.
9. Тиешелүү жактары перпендикулярдуу болгон эки бурч берилген. Алардын бири экинчисинен 4 эсе кичине. Ал бурчтарды тапкыла.
10. $KM \perp LN$ түз сызыктары O чекитинде кесилишет. $\angle POM+$ $+\angle LOD=75°$ жана $\angle KOD=58°$. POM жана LOP бурчтарын эсептегиле.



74-сүрөт.

II ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Параллель түз сызыктарга аныктама бергиле.
2. Кандай кесиндилер (шоолалар) параллель болушат?
3. Параллелдиктин аксиомасы кандай баяндалат?
4. Ички кайчылаш, ички бир жактуу, туура келүүчү ички жана тышкы тиешелүү бурчтарды түшүндүрүп бергиле.
5. Эки түз сызыктын параллелдигинин 1-белгисин айтып бергиле.
6. 2-белгиси кандай баяндалат?
7. 7-теореманын баяндалышын айтып бергиле.
8. Кандай эки түз сызык перпендикулярдуу деп аталат?
9. Перпендикулярдуу түз сызыктар кандай касиеттерге ээ?
10. Түз сызыкта берилген чекит аркылуу өтүүчү жана ага перпендикулярдуу болгон канча түз сызык жүргүзүүгө болот?

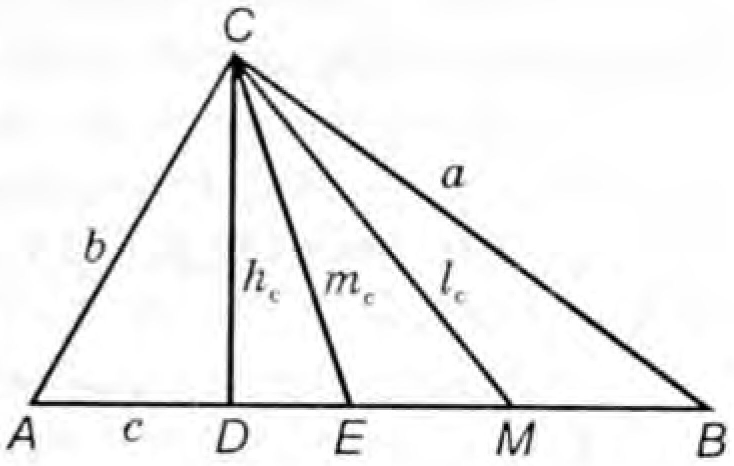
II ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. Ички (тышкы) кайчылаш бурчтардын бир түгөйү барабар болсо, анда алардын экинчи түгөйү да барабар болоорун далилдегиле.
2. Эгерде ички бир жактуу бурчтардын суммасы 180° ка барабар болсо, ички бурчтардын ар бир түгөйү барабар болоорун далилдегиле.
3. AB жана CD шоолалары кесилишпейт. Аларды параллель деп эсептөөгө болобу?
4. Эки параллель түз сызыкты үчүнчү түз сызык менен кескенде: а) бир бурчу 50° ка; б) ички кайчылаш бурчтардын суммасы 110° ка; в) ички бир жактуу бурчтардын айырмасы 40° ка барабар болсо, калган бурчтарын тапкыла.
5. Кесилишүүчү түз сызыктарга перпендикулярдуу болушкан эки түз сызык дайыма кесилишээрин далилдегиле.
6. Параллель түз сызыктардын каалаган кайчылаш бурчтарынын биссектрисалары параллель болоорун далилдегиле.
7. a, b, c, d — түз сызыктар, $a\|b$, $b\|c$, $c\|d$ берилген. $a\|d$ болоорун далилдегиле.

III глава ҮЧ БУРЧТУКТАР

§ 9. ҮЧ БУРЧТУКТАР ЖАНА АЛАРДЫН ТҮРЛӨРҮ

Аныктама. **Бир түз сызыкта жатпаган үч чекиттен жана аларды эки-экиден туташтыруучу үч кесиндиден түзүлгөн фигура үч бурчтук деп аталат.**



75-сүрөт.

Бир түз сызыкта жатпаган *A*, *B*, *C* үч чекити берилсин (75-сүрөт). *AB*, *BC*, *CA* кесиндилерин сызсак, үч бурчтук алынат. Аны *ABC* үч бурчтугу деп аташат. Кыскача ал «ΔABC» деп белгиленет (Δ — үч бурчтук деген белги). *A*, *B*, *C* чекиттери үч бурчтуктун чокулары, *AB*, *BC*, *CA* кесиндилери анын жактары деп аталат. *AB*, *AC* шоолаларынын, б. а. үч бурчтуктун *AB*, *AC* жактарынын арасындагы $\angle BAC$, ошондой эле $\angle ACB$, $\angle CBA$ бурчтары үч бурчтуктун бурчтары болот. Демек, үч бурчтуктун 3 чокусу, 3 жагы, 3 бурчу бар. Үч бурчтуктун жактары жана бурчтары анын **негизги элементтери** деп аталат. Үч бурчтуктун *A*, *B*, *C* чокуларына каршы жаткан жактарды тиешелүү түрдө *a*, *b*, *c* тамгалары менен да белгилөөгө болот: $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Үч бурчтуктун бурчтарын чокуларына карата $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ деп да белгилөөгө мүмкүн, аларды үч бурчтуктун ички бурчтары деп да атайбыз.

Үч бурчтуктун чокусун каршысында жаткан жактын ортосу менен туташтыруучу кесинди анын **медианасы**[1] деп аталат. *c* жагынын ортосу *E* чекити болсо, *CE* кесиндиси *C* чокусунан жүргүзүлгөн медиана болот ($m_c=CE$, $E\in c$). Үч бурчтуктун медианаларын жактарына карата m_a, m_b, m_c аркылуу белгилөө кабыл алынган.

Үч бурчтуктун **биссектрисасы** деп анын бурчунун биссектрисасынын ал бурчтун чокусунун каршысында жаткан жак менен кесилишине чейинки кесиндисин атайбыз.

---

[1] Латын сөзү, *«ортоңку»* дегенди түшүндүрөт.

$\triangle ABC$ да C бурчунун биссектрисасынын CM кесиндиси ал үч бурчтуктун C чокусунан жүргүзүлгөн биссектрисасы болот.

Үч бурчуктун биссектрисалары чокуларына карата l_a, l_b, l_c аркылуу белгиленет ($l_c=CM$).

Үч бурчтуктун чокусунан анын каршысында жаткан жагына перпендикулярдуу түшүрүлгөн кесинди үч бурчтуктун **бийиктиги** деп аталат. 75-сүрөттө $CD\perp AB$, ошондуктан CD кесиндиси үч бурчтуктун C чокусунан AB жагына түшүрүлгөн бийиктиги болот. Үч бурчтуктун бийиктиктерин h_a, h_b, h_c (a, b, c жактарына карата) аркылуу белгилешет ($h_c=CD$). Үч бурчтуктун медианалары, биссектрисалары жана бийиктиктери анын **негизги сызыктары** деп аталышат.

Үч бурчтуктун жактарынын суммасы анын **периметри**[1] деп аталат. $P=a+b+c$, P — периметр.

Үч бурчтуктарды негизги элементтерине карата түрлөргө бөлүүгө болот.

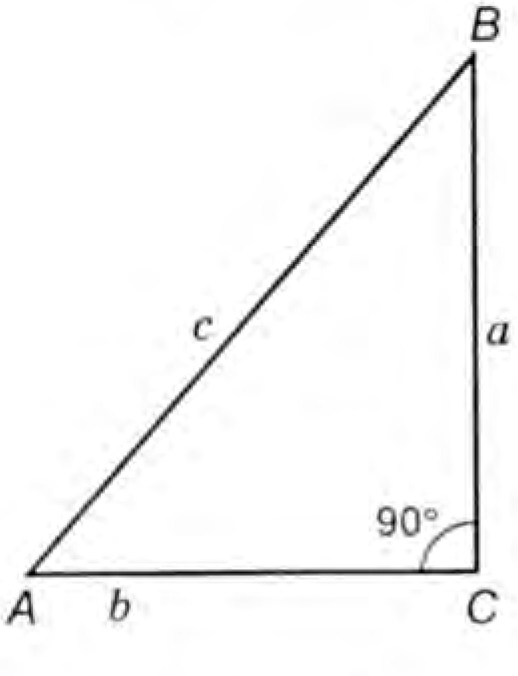
а) **Жактарына карата түрлөрү**

1. Эгерде үч бурчтуктун бардык жактары бири-бирине барабар болушпаса, анда ал **түрдүү жактуу** үч бурчтук деп аталат.

2. Эгерде үч бурчтуктун эки жагы барабар болсо, анда ал **тең капталдуу** үч бурчтук деп аталат. Барабар жактары анын каптал жактары, ал эми үчүнчү жагы — негизи болот.

3. Эгерде үч бурчтуктун бардык жактары барабар болсо, анда ал **тең жактуу** үч бурчтук деп аталат.

б) **Бурчтарына карата түрлөрү**



76-сүрөт.

1. Эгерде үч бурчтуктун бардык бурчтары тар бурчтар болушса, анда ал **тар бурчтуу үч бурчтук** деп аталат.

2. Эгерде үч бурчтуктун бир бурчу тик болсо, анда ал **тик бурчтуу үч бурчтук** деп аталат. Тик бурчтуу үч бурчтуктун тик бурчуна жанаша жаткан жактары анын **катеттери**[2], каршы жаткан жагы **гипотенузасы**[3] деп аталат. 76-сүрөттөгү $\triangle ABC$ да $\angle C=90^\circ$ — тик бурч, a, b — катеттери, c — гипотенузасы болот.

3. Эгерде үч бурчтуктун бир бурчу кең бурч болсо, анда ал **кең бурчтуу үч бурчтук**

---

[1] Грек сөзү, «*жалпак фигуранын чеги*» дегенди түшүндүрөт.

[2] Грек сөзү, «*тик ылдый*» дегенди түшүндүрөт.

[3] Грек сөзү, «*бир нерсенин учтарына керилген*» дегенди түшүндүрөт.

деп аталат. 75-сүрөттөгү *CEM*, *CMB*, *CEB* үч бурчтуктары кең бурчтуу үч бурчтуктар болушат, алардын ар биринин кең бурчун көрсөткүлө.

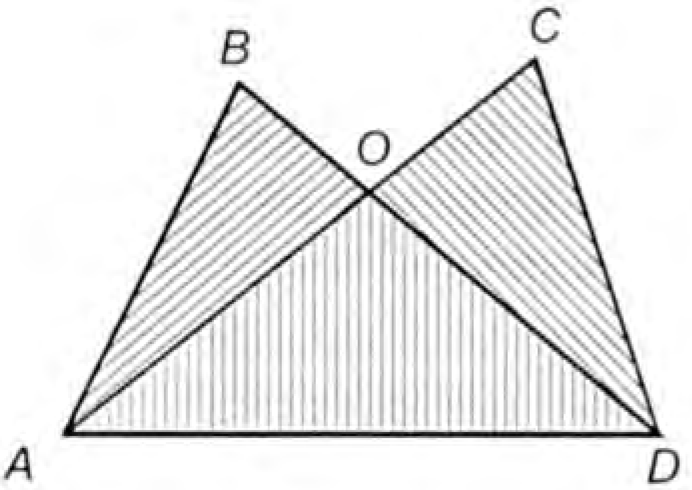
КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Бир түз сызыкта жатпаган *D*, *E*, *M* үч чекитин белгилеп, *DE*, *EM*, *MD* кесиндилерин сызгыла. Алынган үч бурчтуктун чокуларын, жактарын жана бурчтарын атагыла жана аларды белгилеп көрсөткүлө.
2. *ABC* үч бурчтугу берилген. *D* чекити *AB* жагында жатат. *CD* кесиндисин сызгыла. Канча үч бурчтук алынды? Аларды белгилеп жазгыла.
3. «Ар кандай үч бурчтуктун каалаган жагынын узундугу калган эки жагынын узундуктарынын суммасынын кичине болот» деген негизги касиетти *KLF* үч бурчтугунун ар бир жагына карата жазып көрсөткүлө.
4. Жактары төмөндөгүдөй берилген үч бурчтуктун болушу мүмкүнбү: а) 7 м, 7 м, 7 м; б) 40 см, 1 дм, 3 дм; в) 4,5 см, 7 см, 5 см; г) 3 м, 4,5 м, 1 м. Түшүндүргүлө.
5. Үч бурчтуктун жактары: а) 7,5 см, 6 см, 4,5 см; б) 8,1 м, 7,9 м, 12 м болсо, периметрин эсептегиле.
6. Үч бурчтук формасындагы жер участогунун периметри 1248 м. Анын эки жагы: а) a=476 м, b=504 м, б) a=540 м, b=400 м белгилүү. Үчүнчү жагын тапкыла.
7. *ABC* үч бурчтугун сызгыла. а) *AB* жагын сызгыч менен өлчөп, андан кийин *CD* медианасын түзгүлө; б) тик бурчу бар үч бурчтуу сызгычты колдонуп *AB* жагына *CE* бийиктигин түзгүлө; в) транспортирди колдонуп *C* бурчун өлчөгүлө да, *CM* биссектрисасын сызгыла. Ар бир учурду түшүндүрүп бергиле.
8. *DEC* үч бурчтугу берилген. Анын жактарын өлчөбөй туруп, *OM* шооласына *O* дон баштап анын периметрине барабар болгон кесиндини циркулдун жардамы менен түзгүлө.
9. Үч бурчтуктун ар бир жагы периметринин жарымынан кичине болоорун далилдегиле.

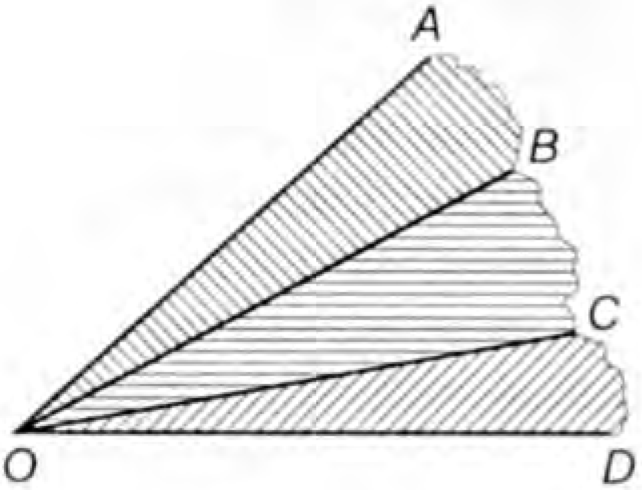
   Көрсөтмө. Үч бурчтуктун a, b, c жактарына карата $a<b+c$ барабарсыздыгынан пайдалангыла.
10. Үч бурчтуктун бир жагынын узундугу b дм. Калган эки жагы $2b$ дм, $3b$ дм болушу мүмкүнбү?
11. Үч бурчтуктун эки жагынын суммасы 72 дм, үчүнчү жагы андан 18 дм ге кыска болсо, периметрин тапкыла.

12. $76^{а}$-сүрөттөн силер канча үч бурчтук көрүп турасыңар? Аларды атагыла.

13. $76^{б}$-сүрөттөн силер канча бурч көрүп турасыңар? аларды атагыла.



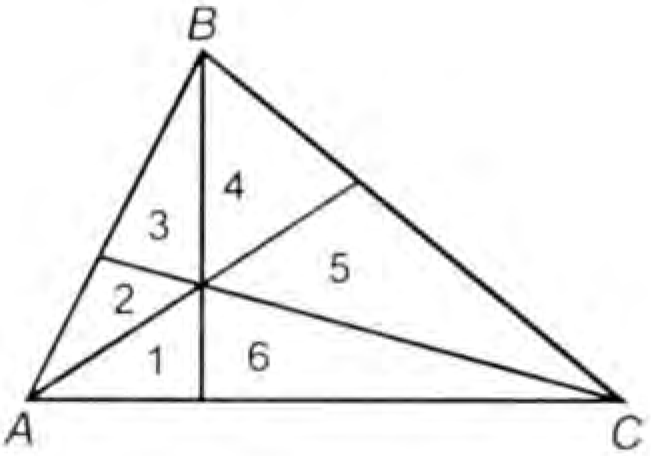
$76^{а}$-сүрөт.



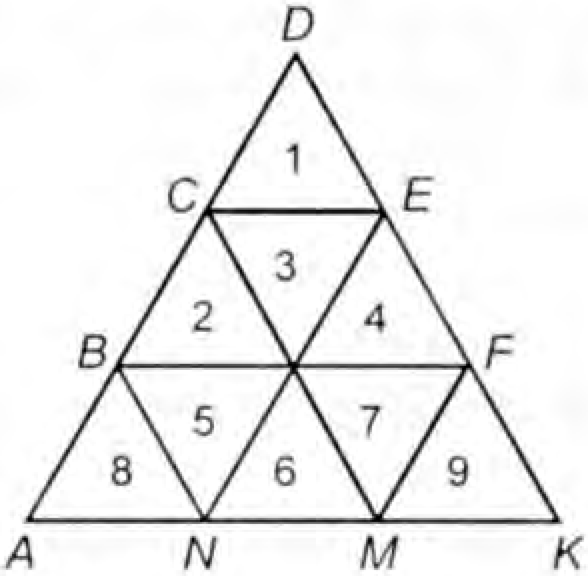
$76^{б}$-сүрөт.

14. $76^{в}$-сүрөттөн силер канча үч бурчтук көрүп турасыңар? Аларды атагыла.

15. $76^{г}$-сүрөттөн силер канча үч бурчтук, канча параллелограмм жана канча трапеция көрүп турасыңар? Аларды санагыла.



$76^{в}$-сүрөт.



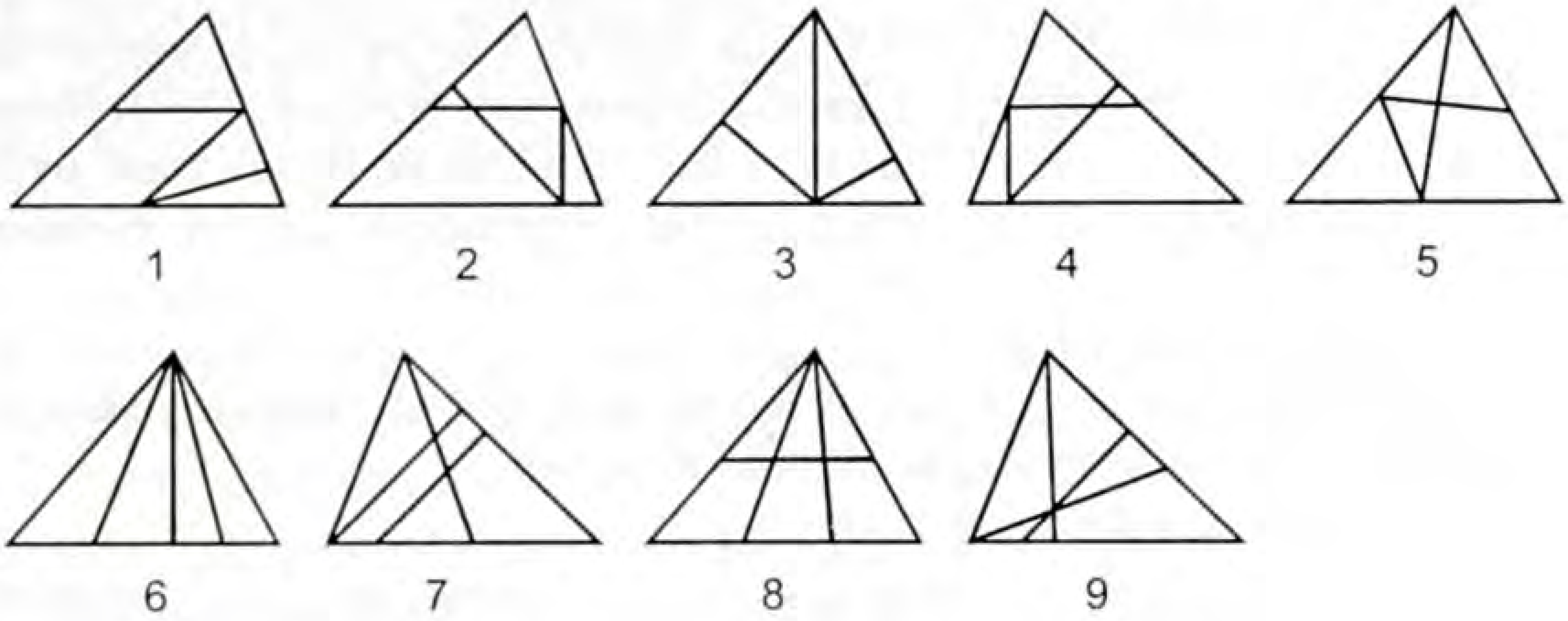
$76^{г}$-сүрөт.

16. Төмөнкү сүрөттөрдүн ($76^{д}$-сүрөт) 1-синен беш, 2-синен алты, 3-сүнөн жети, 4-сүнөн сегиз, 5-синен тогуз, 6-сынан он, 7-синен он бир, 8-синен он эки, 9-сунан он үч бурчтукту көрсөткүлө.

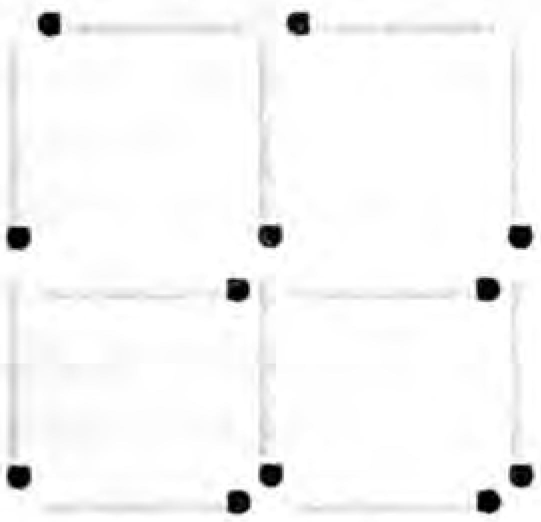
17. $76^{е}$-сүрөттө он эки таякчадан (ширенкенин талынан) турган квадрат көрсөтүлгөн. Эки эле квадрат калгандай кылып кайсы эки таякчаны алып салуу керек?

Чыгаруу. Маселени чыгаруу үчүн адегенде бул сүрөттө бардыгы беш квадрат (бирөө чоң, төртөө кичине) берилгенин эске алуу керек. Жеңилдик үчүн таякчаларды номерлеп алалы. Эгерде 1 жана 2 таякчаларды алып салсак, анда $76^{ж}$-сүрөттөгүдөй эки гана квадрат калат.

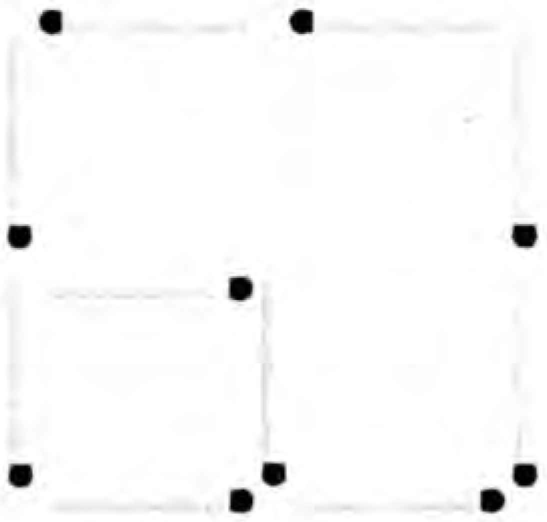
Ушул эле сыяктуу эгерде 2 жана 3 же, 3 жана 4, же 4 жана 1 таякчаларды алып таштаганда да 2 гана квадрат кала тургандыгын өзүңөр текшерип көрүп, тиешелүү сүрөттөрүн тарткыла.



76^{д}-сүрөт.



76^{е}-сүрөт.



76^{ж}-сүрөт.

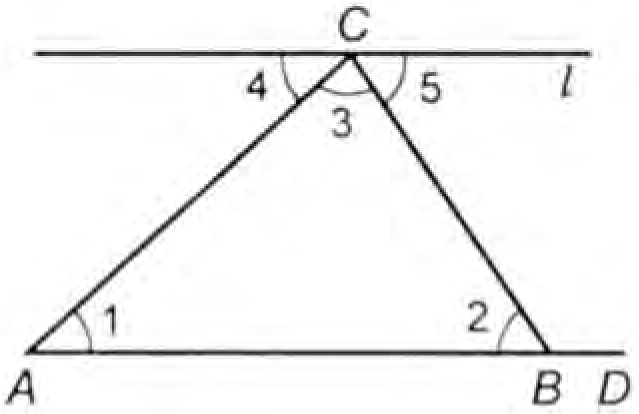
§ 10. ҮЧ БУРЧТУКТУН ИЧКИ БУРЧТАРЫНЫН СУММАСЫ

Ар кандай үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы төмөндөгү теоремага негизделген.

15-теорема. **Үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 180° ка барабар.**

Далилдөө. ΔABC берилсин (77-сүрөт). $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ — анын ички бурчтары болсун. C чокусу аркылуу AB жагына параллель болгон l түз сызыгын жүргүзөбүз. V аксиоманын негизинде l түз сызыгы бирөө гана болот.

$AB \| l$ түз сызыктарын AC түз сызыгы менен кескенде ички кайчылаш бурчтар болгондуктан, $\angle 1 = \angle 4$, ошондой эле $\angle 2 = \angle 5$ болот (8-теорема).



77-сүрөт.

Бирок, $\angle 4+\angle 3+\angle 5=180^\circ$ (жайылган бурч). Анда $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$ болот. Теорема далилденди.

Үч бурчтуктун ички бир бурчуна жанаша жаткан бурч үч бурчтуктун **тышкы бурчу** деп аталат. 77-сүрөттө ΔABC нын $\angle 2$ на жанаша жаткан бурч DBC болот. Ошондуктан ал тышкы бурч деп эсептелет.

Натыйжалар:

1. Үч бурчтуктун тышкы бурчу аны менен жанаша жатпаган ички эки бурчтун суммасына барабар.

15-теореманын негизинде:

$$\angle 1+\angle 3+\angle 2=180^\circ \text{ же } \angle 1+\angle 3=180^\circ-\angle 2 \qquad (1)$$

DBC бурчу $\angle 2$ ге тышкы бурч:

$$\angle DBC+\angle 2=180^\circ \text{ же } \angle DBC=180^\circ-\angle 2 \qquad (2)$$

(1) жана (2) барабардыктардан

$$\angle DBC=\angle 1+\angle 3 \qquad (3)$$

болот.

1-натыйжа далилденди.

2. (3)-барабардыктан: $\angle 1 < \angle DBC$, $\angle 3 < \angle DBC$. Демек, үч бурчтуктун тышкы бурчу аны менен жанаша жатпаган ички бурчтардын ар биринен чоң болот.

3. Үч бурчтуктун бирден ашык кен (тик) бурчу болбойт. Бул 15-теоремадан келип чыгат. Демек, тик бурчтуу үч бурчтуктун эки тар бурчу болот.

4. Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтарынын суммасы 90° ка барабар.

$\triangle ABC$ да $\angle 2=90^\circ$ болсун. Анда $\angle 1$, $\angle 3$ тар бурчтар болушат. 15-теореманын негизинде $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$ же $\angle 1+90^\circ+\angle 3=180^\circ$ болот. Мындан $\angle 1+\angle 3=90^\circ$ болот.

5. Эгерде бир үч бурчтуктун эки бурчу, экинчи үч бурчтуктун тиешелүү эки бурчуна барабар болсо, анда алардын үчүнчү бурчтары да барабар болот.

ABC жана $A'B'C'$ үч бурчтуктары берилсин. $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$ болсун. 15-теореманын негизинде: $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ болот. Мындан $\angle C=\angle C'$ боло тургандыгы түшүнүктүү.

Демек, эки тик бурчтуу үч бурчтуктун бирден тар бурчтары барабар болсо, анда алардын экинчи тар бурчтары да барабар болушат.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Бурчтары: а) 45°, 35°, 110°; б) 70°, 60°, 50°; в) 90°, 60°, 45° болгон үч бурчтук болушу мүмкүнбү?
2. Үч бурчтуктун эки бурчу берилген: а) 30°, 50°; б) 60°, 30°; в) 29°, 30°; г) 81°, 90°. Үчүнчү бурчун тапкыла.
3. Үч бурчтуктун бир бурчу анын бурчтарынын суммасынын $\frac{2}{3}$ бөлүгүн, экинчи бурчу $\frac{4}{9}$ бөлүгүн түзөт. Ар бир бурчун тапкыла.
4. Үч бурчтуктун бир бурчу экинчи бурчунан 45° ка чоң, ал эми үчүнчү бурчу экинчи бурчунан 15° ка кичине болсо, анын бурчтарын тапкыла.
5. ΔABC да $\angle A+\angle B=110°$ жана $\angle B+\angle C=120°$ болсо, ар бир бурчун тапкыла.
6. Эгерде үч бурчтуктардын бурчтарынын катышы 4:2:3 кө барабар болсо, анда ар бир бурчун тапкыла.
7. Үч бурчтуктун эки бурчунун катышы 5:7 ге барабар, ал эми үчүнчү бурчу кичине бурчунан 44° ка чоң. Анын үчүнчү бурчун тапкыла.
8. ABC үч бурчтугунда $\angle A=60°$, $\angle B=30°$, CD — анын бийиктиги, CE — биссектриса. DCE бурчун тапкыла.
9. ΔDEF да $\angle D=76°$, $\angle F=60°$. D жана E бурчтарынын биссектрисалары кандай бурч менен кесилишет?
10. Үч бурчтуктун эки чокусундагы тышкы бурчтары 110° ка жана 160° ка барабар. Үч бурчтуктун ар бир бурчун тапкыла.
11. Үч бурчтуктун эки тышкы бурчу 120° жана 160°. Үчүнчү тышкы бурчун тапкыла.
12. ABC үч бурчтугунун B жана C чокуларындагы тышкы бурчтардын суммасы 250°. Үч бурчтуктун A ички бурчун тапкыла.
13. Үч бурчтуктун ички бурчтарынын бири 50°, ал эми тышкы бурчтарынын бири 85° болсо, анын калган ички бурчтарын тапкыла.
14. Үч бурчтукта: а) эки кең бурч: б) эки тик бурч; в) кең жана тик бурч болбой тургандыгын далилдегиле.
15. ΔABC да B чокусундагы тышкы бурчу A бурчунан 3 эсе чоң жана C бурчунан 40° ка чоң болсо, анын бурчтарын тапкыла.
16. Үч бурчтуктун бурчтарынын бири 61°. Анын калган эки бурчунун биссектрисаларынан түзүлгөн тар бурчту тапкыла.
17. Параллель түз сызыктардын ички бир жактуу бурчтарынын биссектрисалары перпендикулярдуу болоорун далилдегиле.

18. $\triangle ABC$ да B жана C бурчтарынын биссектрисалары O чекитинде кесилишет. Эгерде BAC бурчу BOC бурчунун жарымына барабар болсо A бурчун тапкыла.

§ 11. ҮЧ БУРЧТУКТАРДЫН БАРАБАРДЫГЫ. ҮЧ БУРЧТУКТАРДЫН БАРАБАРДЫГЫНЫН БЕЛГИЛЕРИ

Фигуралардын барабардыгынын белгилери жөнүндөгү түшүнүктүн негизинде (2. 2.) эки үч бурчтуктун барабардыгын аныктоого болот. Эгерде эки үч бурчтуктун тиешелүү жактары жана бурчтары барабар болушса, анда алар **барабар** деп аталат. ABC жана $A'B'C'$ үч бурчтуктарынын барабардыгы $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ түрүндө жазылат. Мында $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC=A'C'$, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$ болот. Үч бурчтуктардын барабардыгын далилдеп көрсөтүүдө бул алты шарттын аткарылышын кароо керек. Бирок, алардын бардыгын далилдеп отуруунун зарылчылыгы жок. Атайын жол менен тандалып алынган үч учурдун туура экендигин көрсөтүү жетиштүү болот, анткени калган учурлары ошол үч учурлардан келип чыгат. Ал үч учурлар үч бурчтуктун барабардык белгилери деп аталат.

16-теорема (Үч бурчтуктардын барабардыгынын 1-белгиси). **Эгерде бир үч бурчтуктун эки жагы жана алардын арасындагы бурчу экинчи үч бурчтуктун тиешелүү эки жагына жана алардын арасындагы бурчуна барабар болушса, анда ал эки үч бурчтук барабар болушат.**

Далилдөө. ΔABC, $\Delta A'B'C'$ берилсин (78-сүрөт). $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A=\angle A'$ болсун. Мында $BC=B'C'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$ болоорун далилдесек, анда $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ болот.

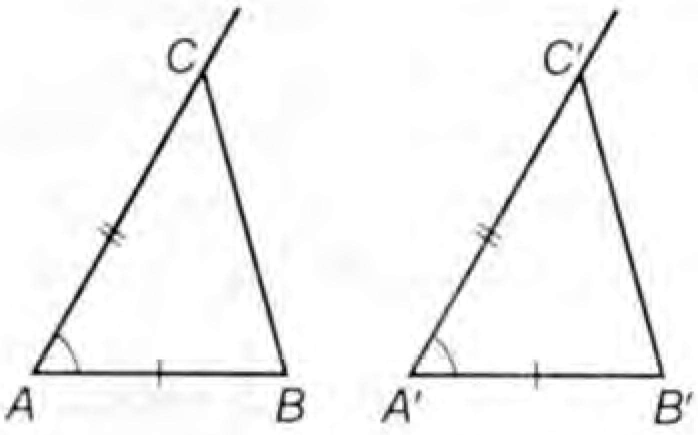
Кесиндилердин барабардыгынын негизинде AB кесиндисине $A'B'$ кесиндисин беттештирүүгө болот. Мында A' чекити менен A чекити, B' — B чекити менен дал келет. AB түз сызыгына карата аныкталган жарым тегиздиктердин C чекити жаткан жарым тегиздикке AB шооласынан баштап $\angle A=\angle A'$ болгондой AC шооласы табылат (4.3.). Мында $AC=A'C'$ болгондуктан, C' чекити C чекити менен дал келет. Натыйжада $BC=B'C'$ болот. Ошондой эле $\angle B$ жана $\angle B'$, $\angle C$ жана $\angle C'$ бурчтары да дал келишет. $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$ болот. Берилген үч бурчтуктар барабар болушат. Теорема далилденди.

17-теорема (Үч бурчтуктардын барабардыгынын экинчи белгиси). **Эгерде бир үч бурчтуктун бир жагы жана ага жанаша жаткан эки бурчу экинчи үч бурчтуктун тиешелүү жагына жана**

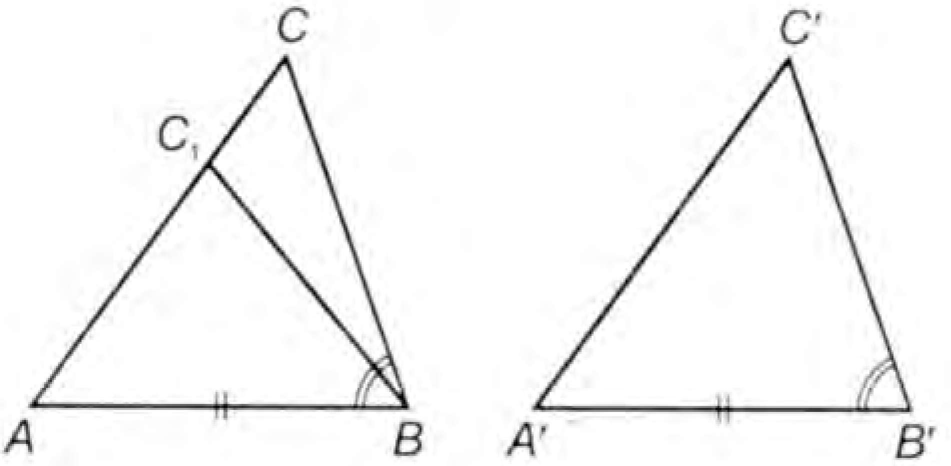
ага жанаша жаткан эки бурчуна барабар болушса, анда ал эки үч бурчтук барабар болушат.

Далилдөө. ΔABC жана $\Delta A'B'C'$ берилген (79-сүрөт). Мында $AB=A'B'$, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$. Берилген үч бурчтуктардын барабардыгын далилдейбиз.

Эгерде $AC=A'C'$ болоорун далилдесек, анда 16-теореманын негизинде берилген үч бурчтуктардын барабардыгы далилденген болот. $AC\neq A'C'$ деп эсептейли. Анда AC шооласында $AC_1=A'C'$ болгондой C_1 чекитин табууга болот. Анда 16-теореманын негизинде $\Delta ABC_1=\Delta A'B'C'$ болот. Мындан $\angle ABC_1=\angle B'$ болуп калат. Бирок шарт боюнча $\angle B=\angle ABC=\angle B'$. Натыйжада AB түз сызыкка карата аныкталган жарым тегиздиктердин BC шооласы жаткан жарым тегиздикте $\angle B'$ бурчуна барабар болгондой эки шоола (BC, BC_1) түзүлдү. Бул IV_2 аксиомасына каршы. Ошондуктан $AC=A'C'$ болот. Анда 16-теореманын негизинде $\Delta ABC= =\Delta A'B'C'$ болот. Теорема далилденди.



78-сүрөт.



79-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $ABCD$ тик бурчтугун AC диагоналы боюнча кескенде ABC жана ACD үч бурчтуктары алынат. Алардын барабардыгын эки түрдүү жол менен: а) бири-бирине беттештирүү аркылуу; б) үч бурчтуктардын барабардыгынын биринчи жана экинчи белгилерине негиздеп далилдегиле.
2. Үч бурчтуктардын барабардыгынын 1-белгисине тескери теорема: Эгерде эки үч бурчтук барабар болсо, анда биринчи үч бурчтуктун эки жагы жана алардын арасындагы бурчу экинчи үч бурчтуктун тиешелүү эки жагына жана алардын арасындагы бурчуна барабар болот. Далилдегиле.
   Көрсөтмө. Үч бурчтуктардын барабардыгынын аныктамасынан пайдалангыла.

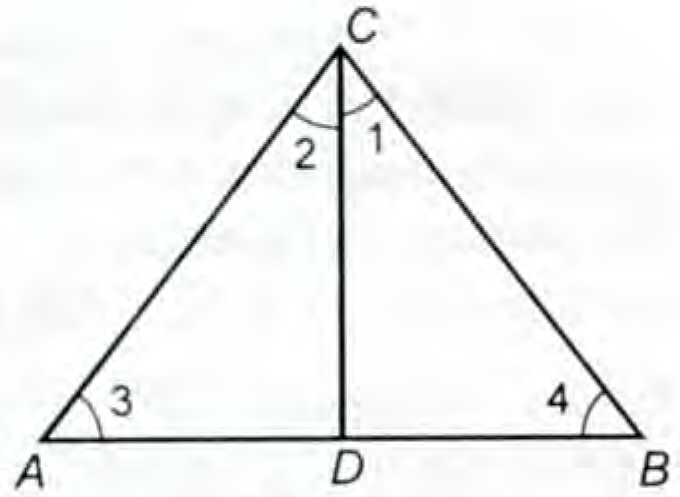
3. AB жана CD кесиндилери O чекитинде кесилишет да, $OA=OB$, $OC=OD$ болот. Далилдегиле: а) $\Delta OAC=\Delta OBD$; б) $AC=BD$; в) $AC \parallel BD$; г) $\Delta ACD=\Delta BDC$.
4. ABC үч бурчтугунун AD медианасынын уландысына $DE=AD$ кесиндиси өлчөнүп коюлган. Далилдегиле: а) $\Delta ABD=\Delta ECD$; б) $\Delta ACD=\Delta EBD$.
5. Үч бурчтуктардын барабардыгынын 2-белгисине тескери теореманы баяндагыла. Аны далилдегиле.
6. CD кесиндисинин учтары m жана n параллель түз сызыктарында жатат. CD кесиндисинин ортосунда жаткан O чекити аркылуу өтүүчү каалагандай түз сызыктын m жана n түз сызыктарынын арасындагы кесиндиси O чекитинде тең экиге бөлүнөөрүн далилдегиле.
7. KLM үч бурчтугунда MD медианасынын уландысына $DA=MD$, KF медианасынын уландысына $FE=KF$ кесиндиси өлчөнүп коюлган. A, L, E чекиттеринин бир түз сызыкта жатаарын далилдегиле.

   Көрсөтмө. $LE \parallel KM$, $AL \parallel KM$ болоорун көрсөтүп, түз сызыктардын параллелдик аксиомасынан пайдалангыла.
8. EK түз сызыгы аркылуу аныкталган жарым тегиздиктердин биринде EKC жана EKM тең капталдуу эмес үч бурчтуктары түзүлгөн. Эгерде $\Delta EKC=\Delta KEM$ болсо, $CM \parallel EK$ болоорун далилдегиле.
9. $\Delta EFL=\Delta PQM$ болуп, $PQ=4,5$ см; $QM=7$ см; $MP=8,5$ см болсо, анда EFL үч бурчтугунун периметрин тапкыла.
10. 6-маселеде O чекити аркылуу өтүүчү b түз сызыгы m, n түз сызыктарын E жана F чекиттеринде кесип өтүп, $EC=12$ см болсо, DF аралыгын тапкыла.
11. Барабар үч бурчтуктардын барабар жактарына жүргүзүлгөн медианалар барабар болоорун далилдегиле.
12. Эгерде бир үч бурчтуктун эки жагы жана алардын бирине жүргүзүлгөн медианасы экинчи үч бурчтуктун тиешелүү эки жагына жана медианасына барабар болсо, анда ал эки үч бурчтуктун барабар болоорун далилдегиле.

§ 12. ТЕҢ КАПТАЛДУУ ҮЧ БУРЧТУКТУН КАСИЕТТЕРИ

Үч бурчтуктун барабардыгынын 1- жана 2-белгилерин пайдаланып, тең капталдуу үч бурчтуктарга карата бир нече теоремаларды далилдөөгө болот.

18-теорема. **Тең капталдуу үч бурчтуктун негизиндеги бурчтары барабар.**



80-сүрөт.

Далилдөө. Берилген (80-сүрөт) ABC үч бурчтугунда $AC=BC$ болсун. AB — негизи, $\angle 3$ жана $\angle 4$ — негизиндеги бурчтар, $\angle 3=\angle 4$ болоорун далилдейбиз. CD биссектрисасын жүргүзсөк, үч бурчтуктарынын барабардыгынын 1-белгиси боюнча $\Delta ACD=\Delta BCD$ (CD — жалпы жак, $AC=BC$, $\angle 2=\angle 1$). Мындан $\angle 3=\angle 4$ экендиги келип чыгат. Теорема далилденди.

19-теорема. **Тең капталдуу үч бурчтуктун негизине жүргүзүлгөн биссектрисасы анын медианасы да, бийиктиги да болуп эсептелет.**

Далилдөө. 18-теоремадан пайдаланабыз. $\Delta ACD=\Delta BCD$ болгондуктан, $AD=BD$ болот. Демек CD — медиана. Ошондой эле, $\angle ADC=\angle BDC$ же $\Delta ADC=\Delta BDC=90°$ ($\angle BDA$ жайылган бурчтун жарымы). Анда CD — бийиктик болот. Теорема далилденди.

Натыйжа. **Тик бурчтуу үч бурчтукта 30° тук бурчтун каршысында жаткан катет гипотенузанын жарымына барабар** (15-, 18-, 19-теоремалардан келип чыгат).

20-теорема (18-теоремага тескери теорема). **Эгерде үч бурчтуктун эки бурчу барабар болсо, анда ал тең капталдуу үч бурчтук болот.**

Далилдөө. ΔABC берилген (80-сүрөт). $\angle 3=\angle 4$ болсун. $AC=BC$ болоорун далилдейбиз. CD биссектрисасын жүргүзсөк, анда $\angle 2=\angle 1$ болот. Натыйжада ΔACD жана ΔBCD үчүн $\angle ADC=\angle BDC$ болот (10, 5-натыйжа). Бул акыркы эки үч бурчтукта CD жалпы жак, ага жанаша жаткан бурчтар барабар. Анда $\Delta ACD=\Delta BCD$ (үч бурчтуктардын барабардыгынын 2-белгиси боюнча). Мындан $AC=BC$. Теорема далилденди.

18—20-теоремалардан төмөндөгүдөй натыйжа келип чыгат.

Натыйжа. **Үч бурчтукта барабар жактардын каршысында барабар бурчтар жана барабар бурчтардын каршысында барабар жактар жатат.**

21-теорема (Үч бурчтуктардын барабардыгынын 3-белгиси). **Эгерде бир үч бурчтуктун үч жагы экинчи үч бурчтуктун тиешелүү үч жагына барабар болсо, анда ал үч бурчтуктар барабар болушат.**

Далилдөө. ABC жана $A'B'C'$ үч бурчтуктары берилсин, $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CA=C'A'$ болсун (81-сүрөт). $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ болоорун далилдейбиз. $A'B'$ түз сызыгына карата C' чекити жатпаган жарым тегиздикте $A'B'$ шооласынан баштап, $\angle BAC=$

$=\angle B'A'C_1$ болгондой кылып $A'E$ шооласын түзөбүз (81-сүрөт). Андан кийин $A'E$ шооласына $A'C_1=AC=A'C'$ болгондой $A'C_1$ кесиндисин өлчөп коюуга мүмкүн. Анда үч бурчтуктардын барабардыгынын негизинде

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C_1 \qquad (1)$$

болот. Мындан $BC=B'C_1=B'C'$ жана $\angle ACB=\angle A'C_1B'$ экендиги келип чыгат. C' жана C_1 чекиттери $A'B'$ түз сызыгына карата ар түрдүү жарым тегиздиктерде жатышат. Ошондуктан $C'C_1$ кесиндиси $A'B'$ түз сызыгы менен кесилишет (II_3 аксиомасы). Алардын кесилишин D чекити аркылуу белгилейли.

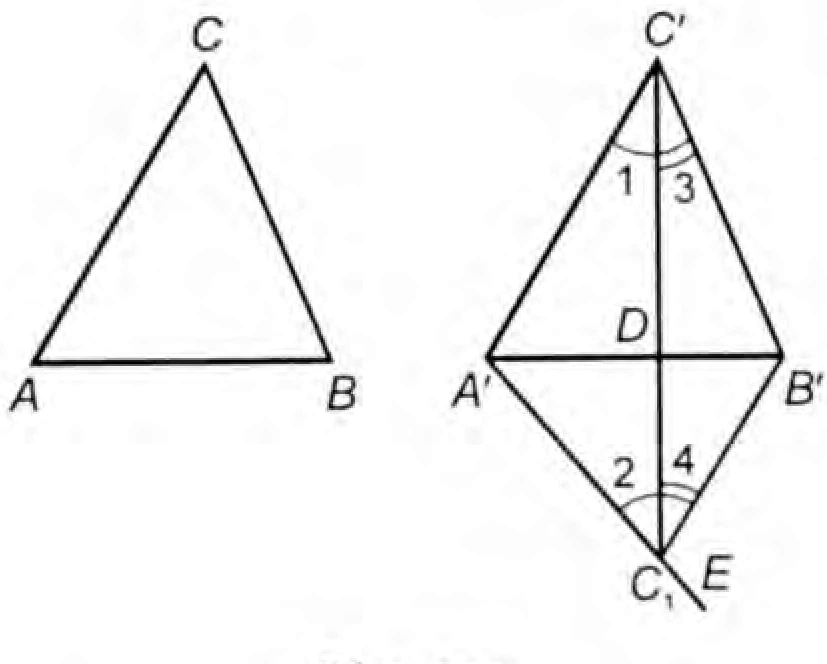
ABC үч бурчтугунун берилишине жараша D чекити AB кесиндисинде же анын уландысында жатышы, же B чекити менен дал келиши мүмкүн.

D чекити $A'B'$ кесиндисинде жатсын (81-сүрөт). $A'C'C_1$ жана $B'C'C_1$ үч бурчтуктары тең капталдуу үч бурчтуктар болгондуктан, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$ болот (18-теорема). Мындан $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$ же $\angle A'C'B'=\angle A'C_1B'$ экендиги түшүнүктүү. Демек, үч бурчтуктардын барабардыгынын 1-белгисинин негизинде

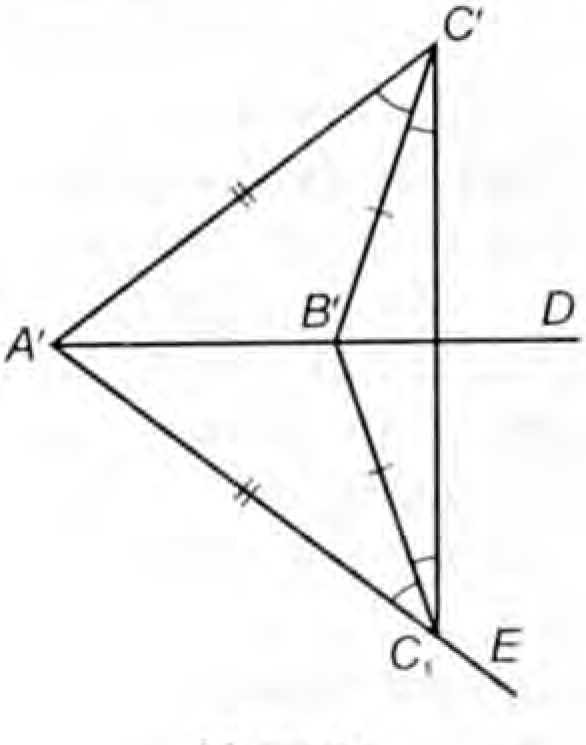
$$\Delta A'B'C' = \Delta A'B'C_1 \qquad (2)$$

болот. (1) жана (2) барабардыктардан $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ экендиги келип чыгат.

D чекити $A'B'$ кесиндисинин уландысында жатсын (82-сүрөт). Жогорудагы белгилөөлөрдү жана түшүнүктөрдү пайдалансак: $\angle A'C'D=\angle 1$, $\angle A'C_1D=\angle 2$, $\angle B'C'D=\angle 3$, $\angle B'C_1D=\angle 4$. Мында $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$ болоору түшүнүктүү. B' чекити A' жана D чекиттеринин арасында жаткандыктан, $C'B'$шооласы $\angle 1$ тун ичинде, C_1B' шооласы $\angle 1$ тун ичинде жатат. Ошондуктан $\angle A'C'B'=\angle 1-\angle 3$, $\angle A'C_1B'=\angle 2-\angle 4$ болот. Бул эки барабардыктан $\angle A'C'B'=\angle A'C_1B'$ деп алууга мүмкүн.



81-сүрөт.



82-сүрөт.

Эми үч бурчтуктардын барабардыгынын 1-белгисин колдонсок,

$$\Delta A'B'C'=\Delta A'B'C_1 \qquad (3)$$

болот. (1) жана (3) барабардыктардан $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ болоору келип чыгат.

Эгерде D чекити B' чекитине дал келсе (чиймени өзүнөр чийгиле), анда теореманын далилдениши кыйла жеңилдейт. Бул учурда

$$\Delta A'B'C'=\Delta A'B'C_1 \qquad (4)$$

боло тургандыгы дароо эле келип чыгат. (1) жана (4) барабардыктардан $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ алынат.

Демек, үч учурда тең $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ болот. Теорема толук далилденди.

Тең капталдуу үч бурчтукка байланыштуу төмөнкү маселенин чыгарылышын карап көрөлү.

Маселе. Негизи AB болгон тең капталдуу ABC үч бурчтугу AD кесиндиси аркылуу ACD жана ABD тең капталдуу эки үч бурчтукка бөлүнгөн. ABC үч бурчтугунун бурчтарын тапкыла.

Чыгаруу. Маселенин шартынан төмөнкүлөргө ээ болобуз.

ABC — тең капталдуу үч бурчтук, AB — анын негизи.

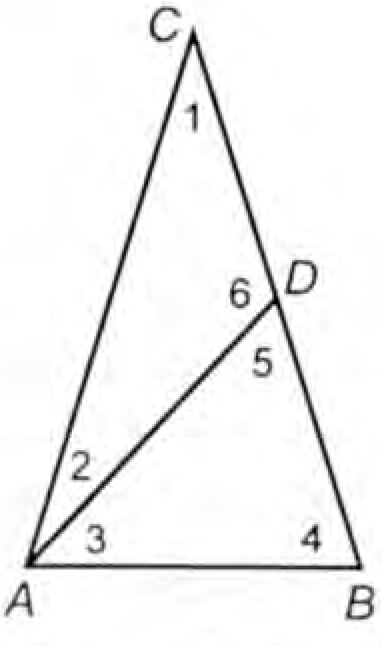
AD кесиндиси ABC үч бурчтугун тең капталдуу эки үч бурчтукка бөлөт ($82^а$-сүрөт).

A, B, C — бурчтарын табуу талап кылынат.

Тең капталдуу үч бурчтуктун касиети боюнча $AC=BC$; $\angle A=\angle B$.

Үч бурчтуктун бурчтарынын суммасы жөнүндөгү теорема боюнча $\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

Маселени чыгаруудан мурда адегенде төмөнкүдөй кызыктуу суроого жооп берели: бизге ACD жана ABD тең капталдуу үч бурчтуктар экендиги белгилүү, бирок ошол үч бурчтуктардын жактарынын кайсылары алардын негиздери боло тургандыгын биз билебиз. Мына ошентип, төмөнкүдөй комбинаторикалык өзүнчө бир маселе келип чыгат: кандай учурларда ACD жана ABD үч бурчтуктарынын экөө тең бир мезгилде тең капталдуу болуша алат? Бул жагдайды (ситуацияны) изилдөөдө төмөнкүдөй стратегия боюнча аракеттенүүгө туура келет: Тең капталдуу ACD жана ABD үч бурчтуктарынын кайсыл жактары алардын негиздери боло алыша тургандыгын аныктоо керек.



$82^а$-сүрөт.

AB жагы ABD тең капталдуу үч бурчтугунун негизи боло алабы? Жок, боло албайт, анткени $\angle DAB<\angle CAB=\angle B$. Демек, анын негизи AD жана BD жактары гана болушу мүмкүн.

AD жагы ADC тең капталдуу үч бурчтугунун негизи боло алабы? Жок, боло албайт, анткени $CD<BC=AC$. Демек, бул үч бурчтуктун негизи AC жана CD жактары гана болушу мүмкүн.

Ошентип, төмөнкүдөй төрт учурдун болушу ыктымал:

1) $AB=BD$ жана $AC=AD$ (анда негиздери AD жана CD);

2) $AB=BD$ жана $AD=CD$ (анда негиздери AD жана AC);

3) $AB=AD$ жана $AD=CD$ (анда негиздери BD жана AC);

4) $AB=AD$ жана $AD=AC$ (анда негиздери BD жана CD).

Убакыт көп талап кылынса да бул учурлардын бардыгын карап көрүп келип чыккан натыйжаларды талдап чыгууга туура келет. Изилдөө ишин улантып жатып биз: же ABC үч бурчтугунун бурчтарын таба алабыз, же биздин карап жаткан учур мүмкүн эмес экендигин далилдейбиз.

Мисалы, 1-учурду карап көрөлү:

$$\left.\begin{aligned}\angle 1+\angle 2+\angle 6=180^\circ,\\ \angle 3+\angle 4+\angle 5=180^\circ.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Үч бурчтуктун сырткы бурчунун касиети жөнүндөгү теорема боюнча

$$\left.\begin{aligned}\angle 6=\angle 3+\angle 4,\\ \angle 5=\angle 2+\angle 1.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

1) учурдагы болжолдоо боюнча

$$\left.\begin{aligned}AB=BD \quad \text{жана} \quad AC=AD,\\ \angle 3=\angle 5 \quad \text{жана} \quad \angle 6=\angle 1.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Мындагы (2) жана (3) касиеттер өзгөчөлүү, анткени бул туурабы же жокпу аны биз так билбейбиз. (3) дөн

$$\angle 5+\angle 6=\angle 1+\angle 3. \tag{4}$$

(2) ден

$$\angle 5+\angle 6=\angle 2+\angle 1+\angle 3+\angle 4. \tag{5}$$

(4) жана (5) барабардыктар бири бирине карама каршылыкта, демек (3) төгү барабардыктар орун алышы мүмкүн эмес, башкача айтканда 1-учур мүмкүн эмес. Ушул эле сыяктуу 4-учурдун мүмкүн эмес экендигин көрсөтүүгө болот. 2- жана 3-учурларды карап чыгууда да дал ушундайча эле иштөө керек. Натыйжада 2- учурда жооп катары $\angle A=\angle B=\frac{540^\circ}{7}$, $\angle C=\frac{180^\circ}{7}$ ге, 3-учурда $\angle A=\angle B=72^\circ$, $\angle C=36^\circ$ ка ээ болобуз.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Үч бурчтуктун жактары: 1) 4 см, 6 см, 7 см; 2) 6 см, 9 см, 0,6 дм; 3) 5 м, 5м, 5 м; 4) 1,2 м, 7 дм, 12 дм. Кайсы учурда: а) тең капталдуу; б) тең жактуу; в) түрдүү жактуу үч бурчтук алынат?
2. 1-маселеде берилген ар бир үч бурчтуктун периметрин тапкыла. Кайсы учурда оңой жол менен эсептөөгө болоорун көрсөткүлө.
3. Тең капталдуу үч бурчтуктун: а) каптал жагы 8 см, негизи 10 см; б) каптал жагы 5 м, негизи 7 м. Периметрин тапкыла.
4. Тең капталдуу үч бурчтуктун периметри 20,6 дм. Эгерде: а) негизи 6 дм болсо, каптал жагын; б) каптал жагы 53 см болсо, негизин; в) негизи каптал жагынан 2,6 дм ге узун болсо, жактарын; г) негизи каптал жагынан 7,9 дм ге кыска болсо, жактарын тапкыла.
5. Тең жактуу үч бурчтуктун жагы 6,2 см. Периметрин тапкыла.
6. Тең жактуу үч бурчтуктун периметри 32,4 дм. Жагын тапкыла.
7. Тең капталдуу үч бурчтуктун каптал жактарынын бирине жүргүзүлгөн медиана анын периметрин 18 дм жана 8 дм узундуктагы бөлүктөргө бөлөт. Үч бурчтуктун жактарын тапкыла.
8. Үч бурчтуктун бир жагы анын жарым периметринен кичине болоорун далилдегиле.
9. *ABC* тең капталдуу үч бурчтугунун периметри 60 дм, *BD* — анын негизине түшүрүлгөн бийиктик. Эгерде *ABD* үч бурчтугунун периметри 46 дм болсо, *BD* ны тапкыла.
10. 9-маселедеги үч бурчтуктун *B* чокусунан жүргүзүлгөн медианасы, биссектрисасы канчага барабар?
11. Тең капталдуу үч бурчтуктун чокусундагы бурчу 75°, негизиндеги бурчтарын тапкыла.
12. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизиндеги бурчу $49^\circ 30'$. Чокусундагы бурчун тапкыла.
13. Тең жактуу үч бурчтуктун ар бир бурчу 60° ка барабар болоорун далилдегиле.
14. Тең капталдуу үч бурчтуктун чокусундагы бурчу 80°. Каптал жагына түшүрүлгөн бийиктик менен негизинин арасындагы бурчту тапкыла.
15. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизиндеги бурчу 50°. Бир каптал жагы менен анын экинчи каптал жагына түшүрүлгөн бийиктигинин арасындагы бурчту тапкыла.

16. Тең капталдуу үч бурчтуктун бийиктиги менен каптал жагынын арасындагы бурч анын негизиндеги бурчтан 15° ка кичине. Үч бурчтуктун бурчтарын тапкыла.

17. *ABC* тең жактуу үч бурчтугунун жактарынын ортолору болгон *D, E, F* чекиттерин удаалаш туташтырсак, жаңы үч бурчтуктар пайда болот. Далилдегиле: а) $\Delta ADF=\Delta DBE$. Дагы кандай барабар үч бурчтуктар келип чыгат? б) $DE \parallel AC$. Дагы кайсы жактары параллель? в) $AE \perp BC$. г) $DE=\frac{1}{2}AC$.

18. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизинин чокуларынан жүргүзүлгөн: а) биссектрисалары; б) медианалары барабар болоорун далилдегиле.

19. Эгерде тең капталдуу үч бурчтуктун эки бурчунун айырмасы 24° болсо, анын бурчтарын тапкыла. Эки учурду карагыла.

20. Тең капталдуу үч бурчтуктун: а) негизиндеги бурчу чокусундагы бурчунан; б) чокусундагы бурчу негизиндеги бурчунан 4 эсе чоң болсо, бурчтарын тапкыла.

21. *ABC* үч бурчтугунда $AB=6$ дм, $BC=6$ дм, $CA=9$ дм. Анын: а) кайсы бурчу эң чоң? б) Кайсы бурчтары барабар?

22. Эгерде эки тең капталдуу үч бурчтуктун тиешелүү негиздери жана аларга түшүрүлгөн бийиктиктери барабар болсо, анда ал үч бурчтуктар барабар болушат. Далилдегиле.

23. Тең жактуу үч бурчтукта: а) бардык медианалары; б) бардык бийиктиктери; в) бардык биссектрисалары өз ара барабар болоорун далилдегиле.

24. Тең капталдуу үч бурчтуктун тышкы бурчтарынын бири: 1) 116°; 2) 100° болсо, үч бурчтуктун бурчтарын тапкыла.

25. Тең капталдуу үч бурчтуктун чокусундагы тышкы бурчтун биссектрисасы негизине параллель болоорун далилдегиле.

§ 13. ТИК БУРЧТУУ ҮЧ БУРЧТУКТАР

§ 9 та тик бурчтуу үч бурчтуктарга түшүнүк берилген. Эми тик бурчтуу үч бурчтукка тиешелүү теоремаларды карайбыз. Тик бурчтуу үч бурчтуктар кандай учурда барабар болушат?

22-теорема. **Эгерде эки тик бурчтуу үч бурчтуктун: 1) тиешелүү катеттери барабар болушса; 2) тиешелүү бирден катеттери жана аларга жанаша жаткан тар бурчтары барабар болушса; 3) гипотенузалары жана тиешелүү бирден тар бурчтары барабар болушса, анда алар барабар болушат.**

Далилдөө. 1-, 2-учурлардын тууралыгы үч бурчтуктардын барабардыгынын биринчи белгисинен, 3-учурдун тууралыгы, 2-белгисинен келип чыгат. Мында эки тик бурчтуу үч бурчтуктун бирден тар бурчтары барабар болсо, анда экинчи тар бурчтары да барабар болоору (15-теорема, 5-натыйжа) силерге белгилүү.

23-теорема. **Бир тик бурчтуу үч бурчтуктун катети жана гипотенузасы экинчи тик бурчтуу үч бурчтуктун тиешелүү катетине жана гипотенузасына барабар болсо, анда ал үч бурчтуктар барабар болушат.**

Далилдөө. ABC жана $A'B'C'$ тик бурчтуу үч бурчтуктары берилип $AB=A'B'$, $BC=B'C'$ болсун (83-сүрөт). $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ болоорун далилдейбиз. CA шооласына толуктоочу шооланы түзүп, ага $CC_1=C'A'$ кесиндисин өлчөп коебуз (3.2). B жана C_1 чекиттерин туташтырабыз. Анда $\Delta C_1BC=\Delta A'B'C'$ болот (22-теорема, 1-учур). Мындан $C_1B=A'B'=AB$, $\angle 1=\angle 2$ болот. Бирок $C_1B=AB$ болгондуктан, ABC_1 үч бурчтугу тең капталдуу. Ошондуктан $\angle 3=\angle 2$ болот. Анда $\angle 3=\angle 1$ болуп, $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ болоору түшүнүктүү (22-теорема, 3-учур). Теорема далилденди.

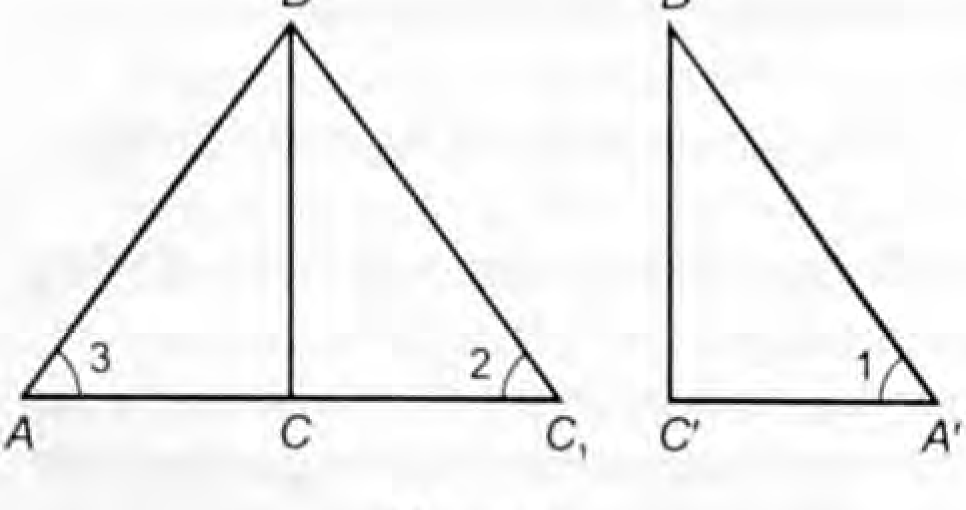
Үч бурчтуктардын жактарынын жана бурчтарынын арасындагы байланышты мүнөздөөчү теоремаларды карайбыз.

24-теорема. **Ар кандай үч бурчтуктун чоң жагынын каршысында чоң бурч жатат.**

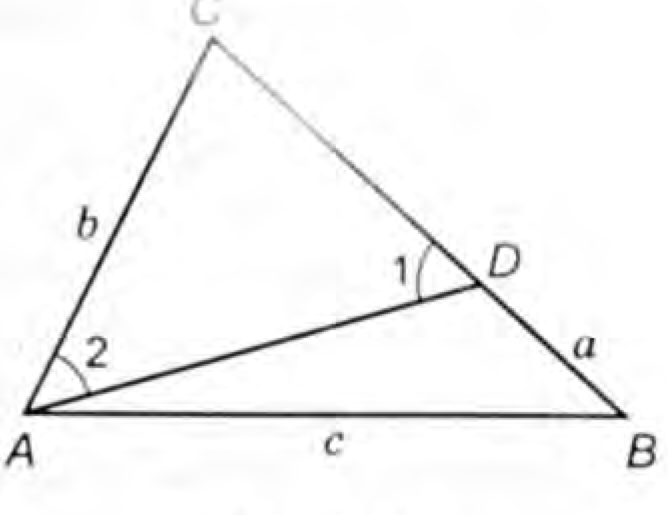
Далилдөө. ΔABC берилип, $a>b$ болсун (84-сүрөт). $\angle A>\angle B$ болоорун далилдейбиз. $CB=a$, CB шооласында $CD=b$ болгондой D чекитин түзүүгө болот (3.1). $a>b$ болгондуктан D чекити CB кесиндисинде жатат. Анда AD шооласы $\angle A$ нун ичинде жатат, демек $\angle 2<\angle A$ (1) болот.

Түзүү боюнча ΔADC тең капталдуу, ошондуктан $\angle 2=\angle 1$ (2). $\angle 1-\Delta ABD$ нын тышкы бурчу. $\angle B<\angle 1$ (3) болот (15-теорема, 2-натыйжа). (1), (2), (3) дөн $\angle B<\angle A$ болот. Теорема далилденди.

25-теорема. **Ар кандай үч бурчтуктун чоң бурчунун каршысында чоң жак жатат.**



83-сүрөт.



84-сүрөт.

Теореманы өз алдынарча далилдөөнү сунуш кылабыз.

24-, 25-теоремалардан төмөндөгүдөй натыйжалар келип чыгат.

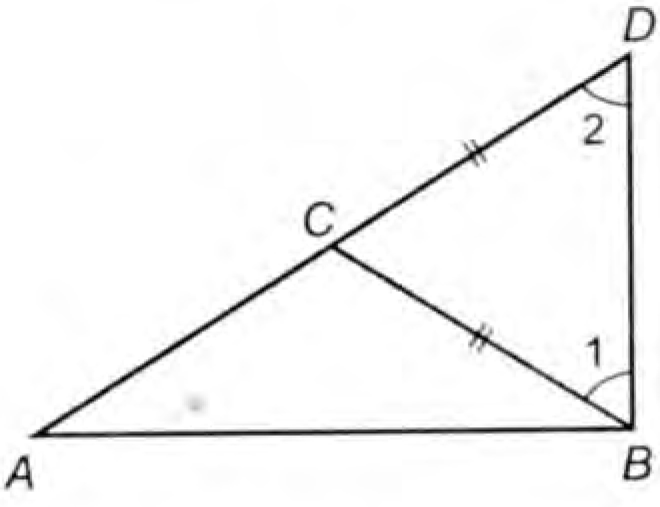
1-натыйжа. **Тик бурчтуу үч бурчтуктун ар бир катети гипотенузасынан кичине болот** (далилдегиле).

2-натыйжа. **Чекиттен түз сызыкка түшүрүлгөн перпендикуляр ал чекиттен жүргүзүлгөн жантыктан кичине болот.** Өз алдынарча далилдегиле.

26-теорема. **Үч бурчтуктун бир жагы калган эки жагынын суммасынан кичине болот.**

Далилдөө. ΔABC берилген (85-сүрөт). $AB<AC+BC$ болоорун далилдейбиз (Бул кесиндилерди өлчөөлөр жолу менен жогоруда далилденген). AC шооласында AC жагынын уландысына C чекитинен баштап $CD=BC$ кесиндисин өлчөп коебуз (3.1). Натыйжада $AD=AC+CD=AC+BC$ (1) болот. ΔBDC — тең капталдуу, анда $\angle 1=\angle 2$ (2). C чекити A жана D чекиттеринин арасында жатат, ошондуктан BC шооласы $\angle ABD$ нын ичинде жатат: $\angle ABD>\angle 1$ (3). (2) барабардыктын негизинде: $\angle 2<\angle ABD$.

Демек, ΔABD да: $AB<AD$ болот (25-теорема). (1) барабардыкты пайдалансак $AB<AC+BC$ (4) болот. Теорема далилденди.



85-сүрөт.

(4) барабарсыздык үч бурчтуктун каалагандай жактары үчүн туура боло тургандыгы түшүнүктүү.

Натыйжа. **Ар кандай үч бурчтуктун бир жагы калган эки жагынын айырмасынан чоң болот.**

$AB>BC$ деп алалы. Анда $AB<AC+BC$ барабарсыздыгынан $AC>AB-BC$ боло тургандыгы түшүнүктүү.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтарынын суммасын тапкыла.
2. Тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтуктардын тар бурчтарын тапкыла.
3. Тик бурчтуу үч бурчтуктун бир тар бурчу: 1) 18°; 2) 56°. Экинчи тар бурчун эсептегиле.
4. Тик бурчтуу үч бурчтуктун бир тар бурчу 45°. а) Катеттеринин бири 8 дм болсо, экинчи катетин тапкыла; б) катеттеринин суммасы 28 дм болсо, ар бир катетин тапкыла; в) ги-

потенузанын жана ага түшүрүлгөн бийиктиктин суммасы 21 дм болсо, гипотенузасын жана бийиктигин тапкыла.

5. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы 18 м жана бир тар бурчу 30°. Ал бурчтун каршысында жаткан катет канчага барабар?

6. Тик бурчтуу үч бурчтуктун бир тар бурчу 60° ка барабар. а) Ага жанаша жаткан катети 6,5 см. Гипотенузасын эсептегиле. б) Кичине катети менен гипотенузасынын суммасы 3,6 дм. Гипотенузанын жана кичине катетинин узундугун тапкыла.

7. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катети гипотенузанын жарымына барабар болсо, анда анын бир бурчу 30° болоорун далилдегиле.

8. *ABC* — тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтук ($\angle C=90°$). *AB*, *BC* жана *CA* жактарынан ортолору тиешелүү түрдө *D*, *E*, *F* чекиттери менен белгиленген. *DC*, *DE*, *DF* кесиндилери жүргүзүлгөн. 1) Канча үч бурчтук пайда болду? 2) Түзүлгөн үч бурчтуктардын бурчтарын тапкыла. 3) *D* чекити берилген үч бурчтуктун чокуларынан бирдей алыстыкта болоорун далилдегиле.

9. *ABC* үч бурчтугунда *BD* медианасы *AC* жагынын жарымына барабар. *B* бурчун тапкыла.

10. Үч бурчтуктун бурчтарынын катышы 1, 2 жана 3 сандарынын катышына барабар. Ал тик бурчтуу үч бурчтук экенин далилдегиле.

11. Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтарынын биссектрисаларынын арасындагы бурч 45° болоорун далилдегиле.

12. 22-теореманын ар бир учурун далилдегиле.

13. Берилген кесиндини тең экиге бөлүп, ага перпендикуляр болгон түз сызыктын ар бир чекити кесиндинин учтарынан бирдей алыстыкта болот. Далилдегиле.

14. Эгерде үч бурчтуктун: а) медианасы бийиктик болуп эсептелсе; б) бийиктиги биссектриса да болсо, анда ал тең капталдуу үч бурчтук болот. Далилдегиле.

15. Тең капталдуу үч бурчтуктун каптал жактарына түшүрүлгөн бийиктиктер барабар болоорун далилдегиле.

16. Эгерде үч бурчтуктун эки бийиктиги барабар болсо, анда ал тең капталдуу үч бурчтук болот. Далилдегиле.

17. Тең жактуу үч бурчтукка эки медиана жүргүзүлгөн. Алардын арасындагы тар бурчту тапкыла.

18. Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтарынын бири 50°. Тик бурчтун биссектрисасы менен гипотенузанын арасындагы тар бурчту тапкыла.

19. ΔABC да $AB=BC$, $BO\perp AC$. а) Перпендикулярды жана жантыктарды белгилеп көрсөткүлө. б) Эгерде D жана E чекиттери AC жагында жатып, $BD=BE$ болсо, $\Delta ABD=\Delta CBE$, $\Delta ODB=\Delta OBE$ болоорун далилдегиле.

20. Түз сызыктан тышкары жаткан чекиттен бири-бирине барабар болгон эки жантык жүргүзүлгөн. Алардын негиздеринин арасындагы аралык 12,4 дм. Жантыктардын түз сызыктагы проекцияларын тапкыла.

21. ABC — тең жактуу үч бурчтук. AC кесиндисинде D жана E чекиттери $AD=CE$ болгондой кылып алынса, DBE кандай үч бурчтук болот?

22. KLM үч бурчтугунда $KM=24,8$ дм, $\angle M=30°$ $\angle L=90°$. Төмөнкүлөрдү тапкыла: 1) K чекитинен LM түз сызыгына чейинки аралыкты; 2) KM жантыгынын KL түз сызыгындагы проекциясын.

23. DEF үч бурчтугунда $\angle D=\angle F=45°$ жана $DF=16,4$ м. Төмөнкүлөрдү тапкыла: 1) E чекитинен DF түз сызыгына чейинки аралыкты; 2) DE жагынын DF түз сызыгына түшүрүлгөн проекциясын.

24. Параллель эки түз сызыкты үчүнчү түз сызык кесип өтүп, 30° тук бурчту түзөт жана ал параллель түз сызыктардын арасындагы кесиндинин узундугу 17,6 дм. Параллель түз сызыктардын арасындагы аралыкты эсептегиле.

25. ABC тең капталдуу үч бурчтугунда AB каптал жагы 16,4 дм, анын тең ортосундагы D чекитинен перпендикуляр жүргүзүлгөн Ал перпендикуляр BC жагын E чекитинде кесип өтөт. ΔAEC нун периметри 26,9 дм. AC жагын тапкыла.

26. Бурчтун биссектрисасына перпендикуляр болгон түз сызык ал бурчтун жактарын чокусунан баштап барабар кесиндилерге кесип өтөөрүн далилдегиле.

§ 14. АЙЛАНАГА ИЧТЕН СЫЗЫЛГАН БУРЧТАР

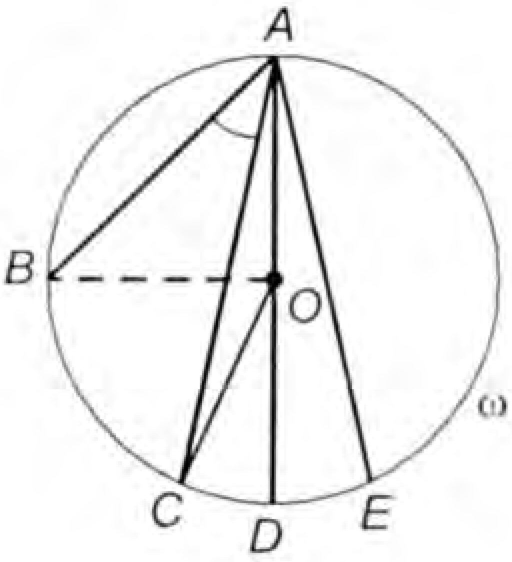
$\omega(O;\ r)$ айланасы берилсин (86-сүрөт). Айланадан каалагандай A чекитин белгилеп, ал аркылуу AB, AC кесүүчүлөрүн жүргүзсөк, BAC бурчуна ээ болобуз.

Чокусу берилген айланада жатып, жактары ал айлананы кесип өтүүчү бурчту айланага **ичтен сызылган бурч** деп айтабыз. $\angle BAC$ — ичтен сызылган бурч болот. Айланага ичтен сызылган бурчту кыскача «ичтен сызылган бурч» деп эле атоо кабыл алынган.

BAC бурчунун B жана C чекиттери айлананы эки жаага бөлөт. Ичтен сызылган бурчтун ичинде жаткан жаасы ($\breve{BC}$), ал бурчтун жаасы же ал бурчка туура келүүчү (тирелген) жаа катары кабыл алынат. Айлананын жаасы ага туура келүүчү борбордук бурч аркылуу өлчөнө тургандыгы белгилүү (4.5). Демек, ичтен сызылган бурчту туура келүүчү жаасы же борбордук бурч аркылуу өлчөөгө болот.

27-теорема. **Айланага ичтен сызылган бурч өзү тирелген жаанын жарымы менен өлчөнөт.**

Далилдөө. $\omega(O; r)$ айланасына ичтен сызылган бурчтарды карайлы (86-сүрөт). Үч учур болушу мүмкүн.



86-сүрөт.

1. Ичтен сызылган бурчтун бир жагы айлананын O борбору аркылуу өтөт. CAD ичтен сызылган бурчун карайлы. Бул бурч CD жаасынын жарымы аркылуу өлчөнө тургандыгын көрсөтөбүз. C менен O чекиттерин туташтырабыз. ΔAOC — тең капталдуу ($OA=OC$). $\angle OAC=\angle OCA$. $\angle COD$ — ал үч бурчтуктун тышкы бурчу. Анда $\angle COD=$ $=2\angle CAD$ (15-теорема, 1-натыйжа),

$$\angle COD=\breve{CD} \text{ (§ 4.5) же } \angle CAD=\frac{\breve{CD}}{2}$$

болот. Бул учур үчүн теорема далилденди.

2. O борбору ичтен сызылган бурчтун ичинде жатат. CAE ичтен сызылган бурчун карайлы. O борбору аркылуу AD диаметрин сызабыз. O чекити $\angle CAE$ нин ичинде жаткандыктан, OA шооласы ал бурчтун ичинде жатат, анда

$$\angle CAD+\angle DAE=\angle CAE \qquad (1)$$

болот. Ошону менен катар

$$\breve{CD}+\breve{DE}=\breve{CE} \qquad (2)$$

болоору белгилүү (4.5). 1-учурдун негизинде $\angle CAD=0{,}5\breve{CD}$, $\angle DAE=0{,}5\,\breve{DE}$. (1) жана (2) барабардыктардан

$$\angle CAE=0{,}5\breve{CE}$$

болот. Демек бул учур үчүн да теорема туура болду.

3. O борбору ичтен сызылган бурчтун сыртында жатат. BAC ичтен сызылган бурчун карайбыз. Далилдениши 2-учурга окшош (аны өз алдынарча далилдегиле). Мында да

$$\angle BAC=0{,}5\,\breve{BC}$$

болот. Демек, теорема толук далилденди.

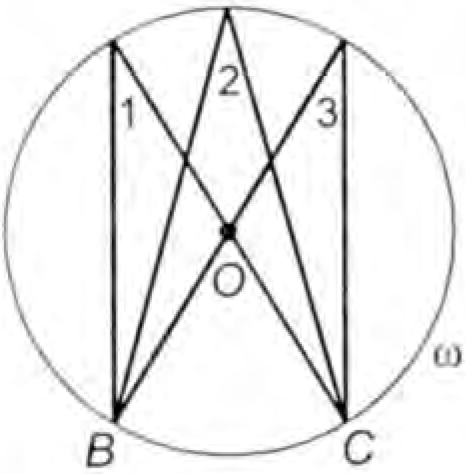
Бул теореманы: «Ичтен сызылган бурч анын жаасына туура келүүчү борбордук бурчтун жарымына барабар» деп айтууга болот.

1-натыйжа. **Айлананын диаметрине тирелген бурч тик бурч болот.**

Ал жарым айланага туура келүүчү жаанын жарымы менен өлчөнөт (27- теорема). Ал жаанын чоңдугу 90° ка барабар. Демек, диаметрге тирелген бурч 90° болот.

2-натыйжа. **Бир эле жаага тирелген, ал эми чокулары жаанын учтары аркылуу өтүүчү түз сызыктын бир жагында жатуучу ичтен сызылган бурчтар барабар болушат.**

87-сүрөттө берилген $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ бурчтардын ар бири BC жаасынын жарымы менен өлчөнөт (27-теорема). Ошондуктан $\angle 1=\angle 2=\angle 3$ болот.



87-сүрөт.

Бурчтун чокусу айлананын ичинде (сыртында) жатып, жактары кесүүчүлөр болуп эсептелген бурчтарды да тиешелүү жаалар аркылуу өлчөөгө болот. Аларды өлчөө ичтен сызылган бурчтарды өлчөөгө негизделген. Алардын далилдөөлөрүнө токтолгон жокпуз. Андай бурчтардын чоңдуктары кандайча өлчөнө тургандыгы төмөнкү 28- жана 29-теоремаларда көрсөтүлгөн.

28-теорема. **Айлананын ичинде кесилишүүчү эки кесүүчүдөн түзүлгөн бурч, анын жактары жана ал жактардын уландылары менен чектелген жаалардын суммасынын жарымы аркылуу өлчөнөт.**

29-теорема. **Айлананын сыртында кесилишүүчү эки кесүүчүдөн түзүлгөн бурч, анын жактарынын арасында жаткан жаалардын айырмасынын жарымы менен өлчөнөт.**

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Борбору O болгон айланага $AB\perp CD$ диаметрлери жүргүзүлгөн. а) BOD борбордук бурчун; б) BAD ичтен сызылган бурчун эсептегиле.
2. Жарым айланага туура келүүчү: а) борбордук бурчту; б) ичтен сызылган бурчту эсептегиле. Сүрөттө белгилеп көрсөткүлө.
3. Борбору O болгон айлана A, B, C чекиттери аркылуу 3 барабар бөлүккө бөлүнгөн. AOB борбордук бурчун жана ABC ичтен сызылган бурчун эсептегиле. Ошол эле айлана D, E, F,

K, L.чекиттери аркылуу 5 барабар бөлүккө бөлүнгөн. DOE борбордук бурчун жана DKE ичтен сызылган бурчтарын эсептегиле.

4. Айлананын BC жаасы 38° ка барабар. Ал айлананын A чекити аркылуу AB жана AC кесүүчүлөрү жүргүзүлгөн. BAC ичтен сызылган бурчунун чоңдугун тапкыла.

5. Эгерде KLM ичтен сызылган бурч 70° болсо, KM жаасынын чоңдугун, б.а. ага туура келүүчү борбордук бурчту тапкыла.

6. Борбордук бурч анын жаасына тирелген ичтен сызылган бурчтан 40° ка чоң. Ар бир бурчтун чоңдугун тапкыла.

7. AB хордасы айлананы эки жаага бөлөт. Эгерде ал жаалардын чоңдуктарынын катышы: а) 7:11; б) 1:9 ка барабар болсо, AB хордасы айлананын чекитинен кандай бурч менен көрүнөт?

8. 3-маселедеги берилген бурчтар $\angle DLE=\angle DKE=\angle DFE$ болоорун далилдегиле. Ар бир бурчтун чоңдугун эсептегиле.

9. Айланага ичтен сызылган ABC бурчу 30°. Эгерде айлананын диаметри 15 дм болсо, AC хордасынын узундугун эсептегиле.

10. $\angle ABC$ — айланага ичтен сызылган бурч, AC хордасы айлананын радиусуна барабар. $\angle ABC$ ун тапкыла. Эки учурду карагыла.

11. Эгерде хорда менен анын учунан жүргүзүлгөн радиус 40° бурчту түзсө, анда хордага тирелген жаанын узундугун тапкыла.

12. Айлананын жаасы 120°. Жаанын хордасы менен анын учунан жүргүзүлгөн радиустун арасындагы бурчту эсептегиле.

13. Айлана A, B, C, D чекиттери аркылуу 4 бөлүккө бөлүнгөн: $\breve{AB}=75^\circ$, $\breve{BC}=48^\circ$, $\breve{CD}=145^\circ$, $\breve{DA}=92^\circ$ жана DB хордалары E чекитинде кесилишет. AEB жана BEC бурчтарын тапкыла.

14. Айлана K, L, M, N чекиттери аркылуу $\breve{KL}:\breve{LM}:\breve{MN}:\breve{NK}=$ $=3:2:4:7$ болгондой бөлүктөргө бөлүнгөн. KM жана LN хордалары D чекитинде кесилишет. LDM бурчун тапкыла.

15. 14-маселедеги LN жана NM түз сызыктары айлананын сыртында жаткан F чекитинде кесилишет (чиймеде текшерип көргүлө). KFN бурчун тапкыла.

Көрсөтмө. Айлананын сыртында кесилишүүчү эки кесүүчүдөн түзүлгөн бурч анын жактарынын арасында жаткан жаалардын айырмасынын жарымы аркылуу өлчөнө тургандыгынан пайдалангыла.

16. Айлананын AB диаметрин CD хордасы M чекитинде кесип өтөт. $\angle CMB=73^\circ$, $\breve{BC}=110^\circ$ болсо, BD жаасынын чоңдугун тапкыла.

17. ED хордасынын жаасы $\overset{\frown}{ED}=40^\circ$, E жануу чекити аркылуу EM жанымасы жүргүзүлгөн. DEM бурчун эсептегиле.

18. Айлананын жаасы $\overset{\frown}{AB}=190^\circ30'$. A жана B чекиттери аркылуу жүргүзүлгөн жанымалар C чекитинде кесилишет. Жанымалар кандай бурчту түзүшөт?

19. Айлананын радиусуна барабар болгон хорда анын бир учу аркылуу жүргүзүлгөн жаныма менен кандай бурч түзөт?

20. 19-маселеде хорданын учтары аркылуу айланага жүргүзүлгөн жанымалардын арасындагы бурчту тапкыла.

21. Хорда айлананы 11:16 катышында бөлөт. Хорданын учтары аркылуу жүргүзүлгөн жанымалардын арасындагы бурчту тапкыла.

22. Айлана 3:5:7 катышында үч бөлүккө бөлүнгөн. Бөлүү чекиттери аркылуу жүргүзүлгөн жанымалар үч бурчтукту түзүшөт. Анын бурчтарын тапкыла.

§ 15. ТҮЗ СЫЗЫК МЕНЕН АЙЛАНАНЫН ЖАНА ЭКИ АЙЛАНАНЫН ӨЗ АРА ЖАЙЛАНЫШЫ

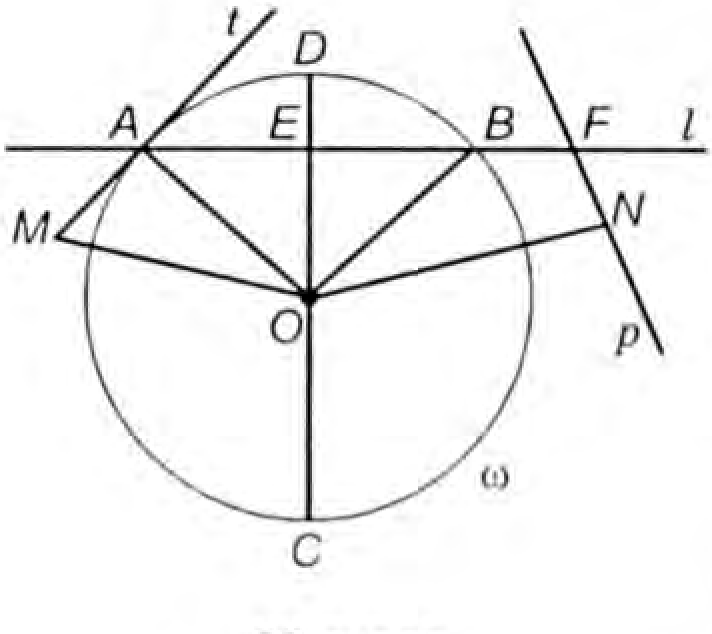
а) Түз сызык менен айлананын өз ара жайланышы.

l түз сызыгы $\omega(O;\ r)$ айланасын A жана B чекиттеринде кесип өтсүн (88-сүрөт). AB кесиндиси айлананын хордасы болот.

30-теорема. **Айлананын хордасын тең экиге бөлүүчү диаметр ал хордага перпендикуляр болот.**

Далилдөө. CD диаметри AB хордасын E чекитинде тең экиге бөлсүн: $AE=EB$. $\Delta OAE=\Delta OBE$ (үч бурчтуктардын барабардыгынын үчүнчү белгиси). Анда $\angle OEA=\angle OEB=90^\circ$ болот. Демек, $OE\perp AB$ же $CD\perp AB$. Теорема далилденди.

31-теорема (30-теоремага тескери теорема). **Эгерде айлананын диаметри хордага перпендикулярдуу болсо, анда ал хорданы тең экиге бөлөт.** Бул теореманы өз алдынарча далилдегиле.



88-сүрөт.

OE кесиндисинин узундугу айлананын O борборунан AB хордасына же l түз сызыгына чейинки аралыкты аныктайт. $d=OE$ деп белгилейли. ΔAOE да $OE<r$ же $d<r$.

1-натыйжа. **Айлананын борборунан кесүүчү түз сызыкка чейинки аралык айлананын радиу-**

сунан кичине болсо, ал түз сызык айлана менен эки чекитте кесилишет.

2-натыйжа. **Айлананын борборунан бирдей алыстыкта жаткан анын хордалары барабар болушат.**

Тик бурчтуу үч бурчтуктардын барабардык белгилеринен пайдаланып, анын тууралыгын оңой эле далилдөөгө болот.

32-теорема. **Айлананын жануу чекити аркылуу өтүүчү жанымa ошол чекитке жүргүзүлгөн радиуска перпендикулярдуу болот.**

Далилдөө. 88-сүрөттөн пайдаланабыз. Айлананын A чекити аркылуу өтүүчү жанымасы t түз сызыгы болсун. $OA \perp t$ болоорун далилдейбиз. $OA=r$ экендиги белгилүү. Айлананын жанымасынын аныктамасы боюнча t жанымасы ω айланасы менен бир гана жалпы чекитке (A жануу чекитине) ээ болот. t түз сызыгынын A чекитинен башка бардык чекиттери айлананын сыртында жатат. Башкача айтканда, t жанымасында жаткан анын ар кандай M чекити (A чекитинен башка) үчүн $OM>r$ болот. Анда $OA=r$ — O борборунан t түз сызыгына (жанымасына) чейинки аралык болот. Демек, $OA \perp t$, теорема далилденди.

1-натыйжа. **Айлананын борборунан түз сызыкка чейинки аралык айлананын радиусуна барабар болсо, түз сызык айлананы жанып өтөт.**

Бул 32-теоремадан келип чыгат.

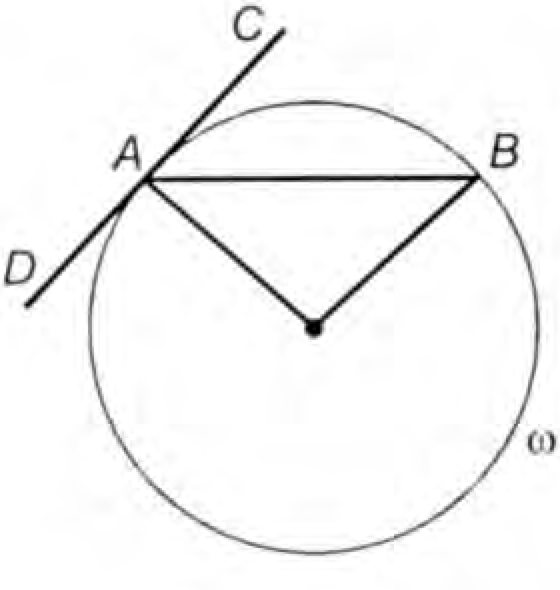
2-натыйжа. **Айлананын борборунан түз сызыкка чейинки аралык айлананын радиусунан чоң болсо, анда түз сызык менен айлана кесилишпейт.**

Чындыгында, 88-сүрөттөгү айлананын O борборунан p түз сызыгына чейинки ON аралыгы r радиусунан чоң ($d=ON>r$) болсо, анда p түз сызыгынын ар бир чекити O борборунан радиустан чоң болгон аралыкта жатат. Демек, p түз сызыгынын ар бир чекити айлананын сыртында жатат, б. а. айлана менен p түз сызыгы кесилишпейт.

Корутунду. Эгерде берилген айлананын борборунан түз сызыкка чейинки аралык айлананын радиусунан кичине (чоң, барабар) болсо, анда түз сызык берилген айлананы эки чекитте кесет (кеспейт, жанып өтөт).

33-теорема. **Айлананын жануу чекитинен жүргүзүлгөн жаныма менен хорданын арасындагы бурч, ал хорда аркылуу аныкталуучу жаанын жарымы менен өлчөнөт.**

Далилдөө. $\omega(O; r)$ айланасы, AB хордасы жана A чекити аркылуу өтүүчү DC жанымасы берилген (89-сүрөт).



89-сүрөт.

AB хордасына туура келүүчү жаалар борбордук эки бурчту түзүшөт. Алардын бири экинчисин 360° ка чейин толуктап турат. Адегенде алардын кичинесине туура келүүчү бурчту карайлы. Бул учурда жаныма менен хорданын арасындагы бурч BAC бурчу болот. Ал бурч AB түз сызыгына карата AC шооласы жана AB жаасы жаткан жарым тегиздикте аныкталат. $\angle BAC=\frac{\breve{AB}}{2}$ болоорун далилдейбиз.

$\angle AOB=\breve{AB}$ жана $OA\perp DC$ (32-теорема) экендиги белгилүү. Анда

$$\angle BAC=90°-\angle OAB \tag{1}$$

болот. ΔOAB — тең капталдуу. Анда

$$2\cdot\angle OAB+\angle AOB=180° \text{ же } \angle OAB=\frac{180°-\angle AOB}{1} \tag{2}$$

болоору түшүнүктүү. (1), (2) формуладан

$$\angle BAC=\frac{\angle AOB}{2} \text{ же } \angle BAC=\frac{\breve{AB}}{2}$$

болот.

Жандаш бурчтар болгондуктан, $\angle BAD=180°-\angle BAC=180°-\frac{\breve{AB}}{2}$ болуп калат. Бул толуктоочу борбордук бурчтун же толуктоочу жаанын жарымы болуп эсептелет. Демек, эки учурда тең жаныма менен хорданын (жануу чекитинен жүргүзүлгөн) арасындагы бурч тиешелүү жаанын жарымы менен өлчөнөт.

Эми эки айлананын өз ара жайланышын карайлы.

$\omega(O; R)$ жана $\omega'(O'; R')$ айланалары берилсин. Борборлорунун арасындагы аралык d болсун: $d=OO'$. Ачыгыраак болсун үчүн $R\geq R'$ деп алалы.

Эки айлананын өз ара жайланышы алардын борборлорунун арасындагы аралыкка байланыштуу. Төмөндөгүдөй учурлар болушу мүмкүн.

1) Эгерде $R+R'<d<R-R'$ болсо, анда айланалар кесилишпейт.

2) $R+R'=d$ же $R-R'=d$ болсо, анда алар борборлору аркылуу өтүүчү түз сызыкта жаткан жалпы чекитке ээ болушат (жанышат).

3) Эгерде $R+R'=d$ же $d>R-R'$ болсо, анда алар эки чекитте кесилишет.

4) Бул ырастоолордун далилдениши силер үчүн азырынча татаал, ошондуктан аларга токтолбойбуз.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $\omega(O; r)$ айланасы берилген. Аны: 1) OA түз сызыгы; 2) OB шооласы; 3) OD кесиндиси канча чекитте кесип өтөт?
2. 1) Айланадан тышкары; 2) айланада; 3) айлананын ичинде жаткан чекиттен ал айланага канча жаныма жүргүзүүгө болот?
3. $\omega(O; r)$ айланасына A чекитинен AB жана AC жанымалары жүргүзүлгөн. B, C — жануу чекиттери. $AB=AC$ барабар болоорун далилдегиле.
4. $\omega(O; 4$ см$)$, $\omega_1(O; 5$ см$)$ айланалары берилген, $OO_1=6$ см. Айланалар жалпы чекитке ээ болобу?
5. Радиуска барабар болгон хорданын учтары аркылуу жүргүзүлгөн жанымалар кандай бурчту түзөт?
6. Радиустары 4 дм жана 5 дм болгон айланалар жанышып өтүшөт. Сырттан жана ичтен жанышкан учурларда алардын борборлорунун арасындагы аралыкты тапкыла.
7. Радиусу 1,5 дм болгон айланадан тышкары жаткан чекиттен айланага бири-бирине перпендикулярдуу эки жаныма жүргүзүлгөн. Ар бир жыныманын узундугун тапкыла.
8. Тик бурчка айлана ичтен сызылган; жануу чекиттерин туташтыруучу хорда 40 см. Айлананын борборунан хордага чейинки аралыкты эсептегиле.
9. Эгерде 1) $d=1$ дм, $R=0{,}8$ дм, $R'=0{,}2$ дм; 2) $d=40$ см, $R=110$ см, $R'=70$ см; 3) $d=12$ см, $R=5$ дм, $R'=3$ см болсо, анда $\omega(O; R)$ жана $\omega'(O'; R')$ айланалары кандай жайланышкан?
10. $\omega_1(O_1; r_1)$, жана $\omega_2(O_2; r_2)$ айланалары эки-экиден бири-бирин жанып өтүшөт. OO_1O_2 үч бурчтугунун периметрин тапкыла.

III ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

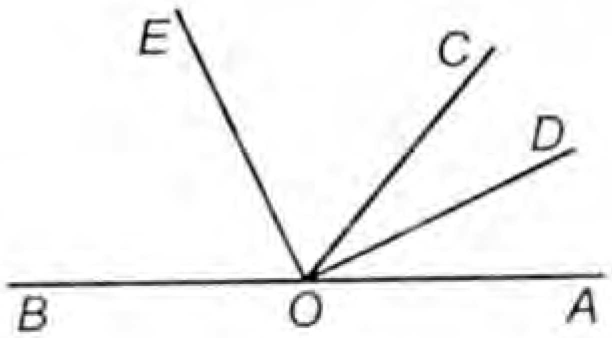
1. Үч бурчтукка аныктама бергиле. Анын кандай элементтерин билесиңер?
2. Үч бурчтуктун медианасы, биссектрисасы, бийиктиги кандай аныкталат?
3. Үч бурчтуктун: а) жактарына; б) бурчтарына карата кандай түрлөрү бар?
4. Үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасын аныктагыла.
5. Үч бурчтуктун ички эки бурчу тик (кең) болушу мүмкүнбү? Эмне үчүн?
6. Үч бурчтуктардын барабардыгынын кандай белгилерин билесиңер?
7. Тең капталдуу үч бурчтуктун касиеттерин айтып бер.
8. Тик бурчтуу үч бурчтуктун кандай касиеттери бар?
9. Эки тик бурчтуу үч бурчтуктун барабардык белгилерин айтып бергиле.
10. Үч бурчтуктун жагы менен бурчу кандай байланышкан?
11. Ичтен сызылган бурч кандай өлчөнөт?
12. Диаметрге тирелген бурч канча градуска барабар? Эмне үчүн?
13. Түз сызыктын айлананы кесип (жанып) өтүүчү шарты кандай аныкталат?
14. Эки айлананын кесилишүүчү (жанышуучу) шарттары кандай мүнөздөлөт?

III ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. Үч бурчтуктун бир жагынын узундугу a болсо, калган эки жагы $b=2a$, $c=3a$ болушу мүмкүнбү?
2. Үч бурчтуктун эки жагынын узундуктарынын суммасы 68 дм, үчүнчү жагы андан 20 дм ге кыска болсо, периметрин тапкыла.
3. Үч бурчтуктун бир бурчу экинчи бурчунун $\frac{1}{3}$ бөлүгүн, үчүнчү бурчу экинчи бурчунун $\frac{2}{3}$ бөлүгүн түзөт. Бурчтарын тапкыла. Ал кандай үч бурчтук болот?
4. 3-маселедеги үч бурчтуктун ар бир бурчунун тышкы бурчун тапкыла.
5. Барабар үч бурчтуктарда барабар жактарга жүргүзүлгөн медианалары барабар болоорун далилдегиле.
6. Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтарынын биссектрисалары кандай учурда барабар болушат? Далилдегиле.
7. Тең жактуу үч бурчтуктун ар бир бурчун тапкыла.
8. Ар кандай үч бурчтуктун эки бурчунун суммасы 180° тан кичине болоорун далилдегиле.
9. Параллель түз сызыктардын арасындагы аралык турактуу болоорун далилдегиле.
10. Бурчтун биссектрисасынын ар кандай чекити жактарынан бирдей аралыкта болоорун далилдегиле.
11. Кесиндинин учтарынан бирдей алыстыкта жаткан чекиттердин геометриялык орду кандай фигура болот? Далилдегиле.
12. Жандаш бурчтардын биссектрисалары перпендикулярдуу болушат. Далилдегиле.

Далилдөө. $\angle AOC$, $\angle COB$ — жандаш бурчтар (90-сүрөт). OD, OE шоолалары ирээти боюнча ал бурчтардын биссектрисалары. Анда $\angle DOC=\frac{1}{2}\angle AOC$, $\angle COE=\frac{1}{2}\angle COB$ боло тургандыгы белгилүү. Жандаш бурчтар болгондуктан $\angle AOC+\angle COB=\angle AOB=180°$ болот.

Натыйжада $2\angle DOC+2\angle COE=180°$, $\angle DOC+\angle COE=90°$, $\angle DOE=90°$. Мындан $OD\perp OE$, б. а. OD, OE биссектрисалары перпендикуляр экендиги келип чыгат.



90-сүрөт.

13. Айлананын параллель хордаларынын арасындагы жаалар барабар болушат. Далилдегиле.

14. Айлананын барабар хордалары борбордон бирдей алыстыкта болот. Далилдегиле.

15. 32-теоремага тескери теореманы далилдегиле.

16. Эгерде $AB=BC+AC$ болсо, анда A, B, C чекиттери бир түз сызыкта жатаарын далилдегиле.

17. Тик бурчтуу үч бурчтукта 30° бурчтун каршысында жаткан катет гипотенузанын жарымына барабар болоорун далилдегиле.

18. ΔABC да $AB=18$ см, $\angle B=30°$, $\angle C=90°$. Ушул берилгендер боюнча төмөнкүлөрдү тапкыла: а) A чекитинен CB түз сызыгына чейинки аралыкты; б) AB жантыгынын AC түз сызыгындагы проекциясын; в) AC, BC кесиндилеринин AB түз сызыгындагы проекцияларын.

19. Айлананын үчтөн бир бөлүгүнө тирелген ичтен сызылган бурчтун чоңдугун тапкыла.

20. Хорда аркылуу бөлүнгөн айлананын бөлүктөрүнүн бири дагы үч барабар бөлүккө, экинчиси беш барабар бөлүккө бөлүнгөн. Хорданын бир учу аркылуу айланага жаныма жүргүзүлгөн. Ал жаныманын хорда менен түзгөн бир бурчун тапкыла.

21. Тең жактуу үч бурчтуктун жагы жарым айлананын диаметри болуп эсептелет. Үч бурчтуктун жактары жарым айлана аркылуу жана жарым айлана үч бурчтуктун жактары аркылуу кандай бөлүктөргө бөлүнөт?

22. Тең капталдуу үч бурчтуктун жактарынын ортолору экинчи тең капталдуу үч бурчтуктун чокулары болоорун далилдегиле.

23. A чекитинен айланага AB жана AC жанымалары жүргүзүлгөн, B, C — жануу чекиттери, O айлананын борбору. $OA>AB$, $OA>AC$ болоорун далилдегиле.

24. Эки айлананын радиустары 5 см жана 6 см, ал эми алардын борборлорунун арасындагы аралык 9 см. Бул айланалар жалпы чекитке ээ болушабы?

25. Үч айлананын ар бири калган экөөнүн борборлору аркылуу өтөт. Айланалардын борборлору кандай үч бурчтуктун чокулары болушат?

Конструктивдүү мүнөздөгү төмөнкү маселенин чыгарылышына токтололу.

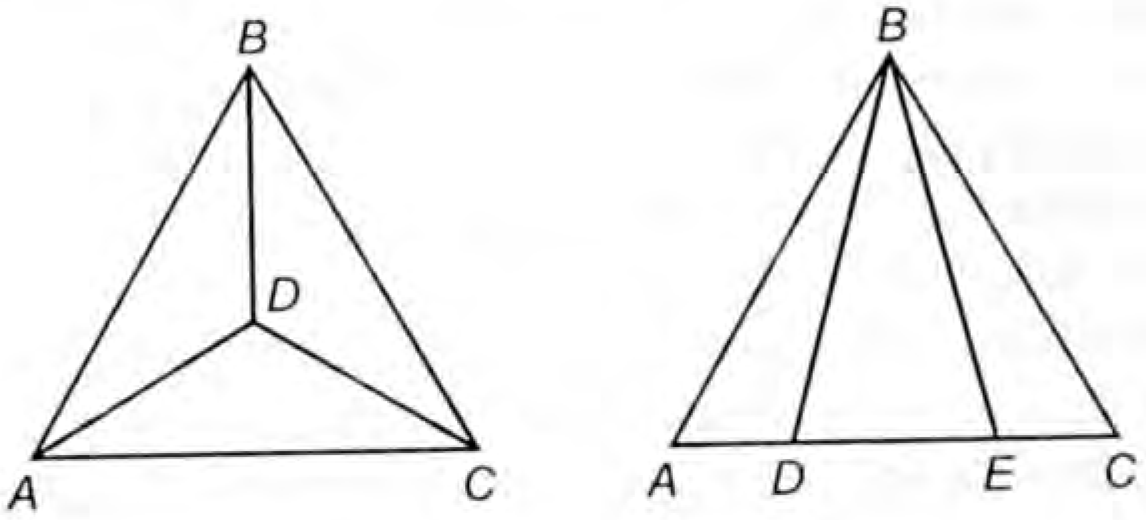
26. Өз ара бири бирине барабар үч үч бурчтукка ажыратылып кесиле турган бардык үч бурчтуктарды тапкыла.

Көрсөтмө. Адегенде үч бурчтукту үч үч бурчтукка ажырата кесүүнүн эрежесин карап көрөлү.

Үч бурчтукту каалагандай үч үч бурчтукка ажырата кесүүдө жок дегенде бир кесик үч бурчтуктун чокусу аркылуу өтүүгө тийиш. Бул кесик *B* чокусу аркылуу өтөт дейли, анда ал же *B* бурчуна каршы жаткан *AC* жактын кандайдыр бир чекитине чейин жетет, же *ABC* үч бурчтуктун кандайдыр ички *D* чекитине чейин эле жетип токтойт.

Мында төмөнкүдөй эки учур келип чыгат:

1) Эгерде кесик *AC* жагына чейин жетпейт ($90^{а}$-сүрөт) десек, анда үч бурчтукту андан ары кесүү бир гана жол менен — *AD* жана *CD* кесиндилери боюнча жүргүзүлөт.



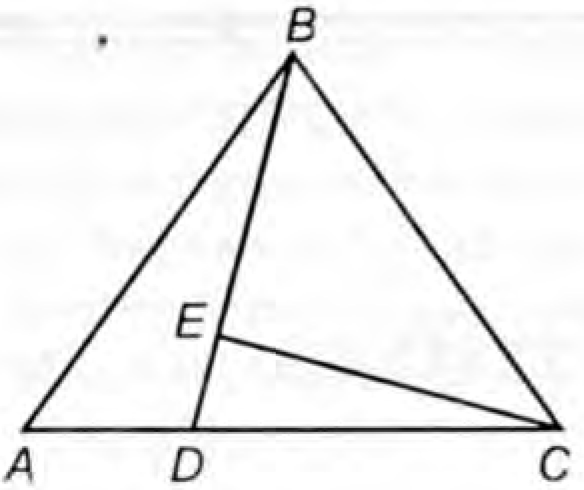
$90^{а}$-сүрөт.

2) Эгерде кесик *AC* жагынын *D* чекитине чейин жетсе, анда *ABC* үч бурчтугу *ABD* жана *BCD* эки үч бурчтукка бөлүнөт, жана эми ушул эки үч бурчтуктун бирөөнү эки үч бурчтукка бөлүп кесүү керек. Муну үч түрлүү жол менен иштөөгө болот ($90^{а,\ б,\ в}$-сүрөт).

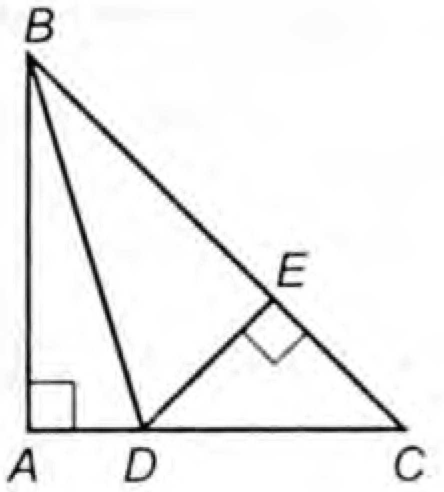
Мына ошентип, биз ар кандай татаалдыктагы төрт түрлүү ситуацияга ээ болобуз.

$90^{а}$-сүрөтүндөгү $\angle ADC > \angle ABD$, анткени *ADC* бурчу *ABD* жана *BCD* үч бурчтуктарынын сырткы бурчтарынын суммасына барабар. Демек *ADC* бурчу *BAD* жана *ABD* бурчтарынан чоң. Ошондуктан $\angle BDC = \angle ADB$ ошол эле сыяктуу бул бурчтардын ар бири *ADC* бурчуна барабар. Мындан *ABC* үч бурчтугунун тең жактуу экендиги келип чыгат.

Эми калган учурларды катары менен карап чыгалы. Адегенде «эгерде барабар эки үч бурчтуктун жалпы бир каптал жагы болсо жана алардын негиздери дал ошол жалпы жактын эки башка жактарында бир түз сызыкта жатышса, анда ал үч бурчтуктар тең капталдуу үч бурчтуктун «жарымдары» болушат, башкача айтканда тик бурчтуу үч бурчтуктар болуп эсептелет» – деген ырастоону эске алалы.



$90^{б}$-сүрөт.



$90^{в}$-сүрөт.

Мындай ырастоодон төмөнкүлөргө ээ болобуз:

а) $90^{в}$-сүрөттө *BDA*, *BDE*, *DEB* жана *BEC* бурчтары тик бурчтар, мындай болушу мүмкүн эмес, демек бул ыкма менен бир дагы үч бурчтукту барабар үч үч бурчтукка бөлүп кесүүгө болбойт;

б) $90^{в}$-сүрөттө *BEC* жана *CED* бурчтары тик бурчтар болушат. Бирок анда *ADB* бурчу кең бурч, ал эми кең бурчтуу үч бурчтук тик бурчтуу үч бурчтукка барабар болушу мүмкүн эмес, ошондуктан бул ыкма менен да үч бурчтукту барабар үч үч бурчтукка бөлүп кесүүгө болбойт;

в) $90^{в}$-сүрөттө *BED* жана *CED* бурчтары тик бурчтар болушат, демек *ABD* үч бурчтугу тик бурчтуу жана ал үч бурчтук *BDE* үч бурчтугуна барабар болгондуктан *BD* кесиндиси анын гипотенузасы болуп эсептелет жана *BAD* бурчу тик бурч болот. Андан ары *ABD*, *BDE* жана *DEC* үч бурчтуктарынын барабардыгынан пайдаланып $\angle ADB=\angle BDE=\angle EDC$ жана алардын ар бири 60°ка барабар экендигине ээ болобуз. Мындан *ABC* тар бурчу 30° болгон тик бурчтуу үч бурчтук экендиги келип чыгат.

Мына ошентип, тең жактуу үч бурчтукту жана тар бурчу 30° болгон тик бурчтуу үч бурчтукту гана барабар үч бурчтукка бөлүп кесүүгө болот.

IV глава ГЕОМЕТРИЯЛЫК ТҮЗҮҮЛӨР

§ 16. ГЕОМЕТРИЯЛЫК ТҮЗҮҮЛӨР ЖӨНҮНДӨГҮ ТҮШҮНҮК. КУРАЛДАР

Геометриянын элементтерин окуп-үйрөнө баштаганда эле айрым фигураларды түзүү үчүн атайын куралдарды пайдалангандыгыбыз белгилүү. Мисалы, түз сызыкты, кесиндини жана шооланы сызуу үчүн сызгычты, ал эми айлананы сызуу үчүн циркулду колдонгонбуз. Ошондуктан геометриялык түзүүлөрдү төмөндөгүдөй аныктоого болот: **геометриялык түзүүлөр** деп, берилген куралдын жардамы менен кандайдыр геометриялык фигураларды түзүүнү атайбыз. Геометриялык түзүүлөр аркылуу алынган фигуралар — чекит, түз сызык, кесинди, айлана, бурч, үч бурчтук жана башкалар болушу мүмкүн.

Биз төмөндө геометриялык түзүүлөрдү тегиздикте карайбыз, ошондуктан түзүүгө берилген жана түзүлгөн фигураларды тегиздикте жатат деп эсептейбиз.

Геометриялык түзүүлөр теориялык жактан абсолюттуу так аткарылат деп эсептелет. Бирок, айрым учурда так аткарылбай калышы да мүмкүн. Ал колдонулуучу куралдардын так эместигине жана түзүүнү аткаруунун айрым кемчилдиктерине байланыштуу.

Геометриялык түзүүлөр, көбүнчө маселелер түрүндө берилет. Ошондуктан аларды **түзүүгө берилген маселелер** деп атоого болот. Андай маселелердин шартында жана талабында берилген фигуралар жана түзүлүшү талап кылынган фигуралар ачык көрсөтүлөт. Мисалы, «тик бурчтукка сырттан сызылган айлананы түзгүлө» деген маселеде берилген фигура катарында тик бурчтук, ал эми изделүүчү фигура катарында айлана алынат.

Түзүүгө берилген геометриялык маселенин шартын канааттандыруучу ар бир фигура маселенин **чыгарылышы** деп аталат. Демек, түзүүгө берилген геометриялык маселени чыгаруу дегенде, ал маселенин шартын канааттандыруучу фигураны түзүүнү түшүнөбүз. Анда жогоруда берилген маселеде чыгарылышы болуп айлана эсептелет.

Түзүүгө берилген геометриялык маселелерди чыгарууга негизинен төмөндөгүдөй **талаптар** коюлат. Ал талаптар геометриялык түзүүлөр теориясынын негизги жоболору катарында кабыл алынат.

1. Маселеде берилген фигуралар түзүлгөн деп эсептелет.

Бул талаптын мааниси төмөндөгүдөй.

Маселенин шартында берилген фигуралар түзүлгөн деп каралат, ошондуктан аларды алдын-ала эле түзүп коюшат. Мисалы, кандайдыр бир маселенин шартында: «Эки жагы жана алардын арасындагы бурчу боюнча үч бурчтукту түзгүлө» деп берилсе, анда эки жагын (кесиндини) жана бурчту алдын ала түзүп коёбуз. Ал эми түзүү керек болгон фигура берилгендерге карата кийин түзүлөт. Демек, түзүүгө берилген геометриялык маселелердин шартынын жазылышы эсептөөгө жана далилдөөгө берилген геометриялык маселелердин шартын жазуудан мына ушунусу менен айырмаланат.

2. Түзүлгөн фигурада жатуучу каалаган чекитти түзүлгөн деп эсептөөгө болот.

Чындыгында эле, маселенин шартында кандайдыр айлана берилген болсо, б. а. түзүлгөн болсо, анда ал айланада каалагандай чекитти белгилөөгө болот жана аны түзүлгөн деп карайбыз.

3. Түзүлгөн фигурада жатпаган каалагандай чекитти түзүлгөн деп алууга болот (2-учурдагыга окшош түшүндүрүлөт).

Геометриялык түзүүлөрдү аткарууда колдонулуучу негизги куралдар болуп сызгыч жана циркуль эсептелет.

Алардын ар бири аркылуу аткарыла турган түзүүлөр ал куралдардын милдеттери катарында кабыл алынат.

1) Сызгычтын жардамы менен төмөндөгүдөй түзүүлөрдү аткарууга болот:

а) Берилген эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызык түзүлөт.

Ар кандай эки чекит аркылуу өтүүчү бир түз сызыктын бар экендиги геометриянын белгилүү аксиомасы аркылуу көрсөтүлөт. Бул берилген (түзүлгөн) эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыкты кандай түзүү керек экендиги белгилүү.

Кесинди жана шоола түз сызыктын бөлүктөрү болуп эсептелгендиктен аларды да оңой түзүүгө болот.

б) Эгерде эки түз сызык берилип, алар кесилише турган болсо, анда алардын кесилишкен чекити да түзүлгөн болот.

Берилген эки түз сызык түзүлгөн дейли. Анда алардын кесилишин түзүү үчүн сызгычтын жардамы менен түз сызыктарды кесилишкенге чейин созуу керек.

2) Циркулдун жардамы менен төмөндөгүдөй түзүүлөрдү аткарууга болот:

а) Берилген чекитти борбор, берилген кесиндини радиус кылып айлана сызууга болот.

б) Берилген эки айлана кесилише турган болсо, анда алардын кесилишкен чекиттерин түзүп алууга болот. Ал үчүн айлананы а) учурундагыдай кылып түзүп, андан кийин кесилишкен чекитин аныктоо керек.

Ошентип, циркуль жана сызгычтын жардамы менен жогорудагы негизги түзүүлөрдү аткарууга болот, андан тышкары: берилген айлана жана түз сызык кесилише турган болсо, анда алардын кесилишкен чекиттерин дайыма түзүүгө мүмкүн.

ЦИРКУЛДУ ЖАНА СЫЗГЫЧТЫ ПАЙДАЛАНЫП, ТӨМӨНДӨГҮ ЭҢ ЖӨНӨКӨЙ ТҮЗҮҮЛӨРДҮ АТКАРГЫЛА

1. A жана B чекиттери берилген. а) AB кесиндисин сызгыла. б) AB шооласын сызгыла. в) AB түз сызыгын сызгыла (Ар бир учур үчүн чиймени бөлөк сызгыла).
2. a жана b түз сызыктарынын кесилишин түзгүлө.
3. O чекити жана a кесиндиси берилген. Борбору O, радиусу a болгон айлананы сызгыла.
4. Борбору O, радиусу r болгон айлана берилген. O борбору аркылуу өтүүчү түз сызыктын берилген айлана менен кесилишин түзгүлө.
5. a жана b кесиндилери берилген. Түз сызыкта ошол кесиндилердин: а) $a+b$ суммасын; б) $a-b$ айырмасын ($a>b$ болгондо) түзгүлө.
6. a кесиндиси берилген. Андан 3 эсе чоң болгон кесиндини түзгүлө.
7. Түз сызыкта $AB=a$, $BC=b$ кесиндилери берилген ($a>b$). Борборлору A жана B чекиттери, радиустары тиешелүү түрдө a жана b болгон айланалардын кесилишкен чекиттерин түзгүлө.
8. O чекити жана a кесиндиси берилген. O дон a аралыкта жатуучу чекиттердин геометриялык орду (көптүгү) кандай фигура болот? Сызып көрсөткүлө.
9. AB кесиндиси берилген. A жана B чекиттеринен бирдей алыстыкта жаткан чекиттердин геометриялык ордун (ч. г. о.) аныктагыла жана түзгүлө.
10. Бурчтун жактарынан бирдей аралыкта жаткан ч. г. о. аныктагыла жана түзгүлө.
11. ABC бурчу жана анын ичинде жаткан D чекити берилген. Бурчтун жактарынан бирдей алыстыкта жана D чекитинен a аралыкта жаткан чекитти түзгүлө.

12. Берилген *a* түз сызыгынан *d* аралыкта жаткан ч. г. о. *a* га параллель болгон эки түз сызык болот. Далилдегиле.

13. а) Кесилишүүчү; б) параллель эки түз сызыктан бирдей алыстыкта жаткан ч. г. о. тапкыла жана аларды түзгүлө.

14. *ABC* үч бурчтугу берилген. *C* бурчунун биссектрисасында *A* жана *B* чокуларынан бирдей алыстыкта жаткан чекитти тапкыла.

§ 17. ТҮЗҮҮГӨ БЕРИЛГЕН ЖӨНӨКӨЙ МАСЕЛЕЛЕР

Түзүүгө берилген маселелердин ар биринин чыгарылышы тигил же бул чекиттерди (мисалы, үч бурчтуктун чокуларын түзүүгө келтирилет; ал эми мындай чекиттерди түзүү болсо, негизинен геометриялык оруңдардын кесилишин (эки айлананын кесилишин, айлананын түз сызык менен кесилишин же эки түз сызыктын кесилишин) табуудан турат. Айлананы циркуль менен, түз сызыкты сызгыч менен чийишет, демек, түзүүгө берилген маселелерди да дал ушул аспаптардын (циркуль жана сызгыч) жардамы менен чыгарабыз. Түзүүгө берилген маселелерди чыгарууда колдонула турган бул сыяктуу аспаптар бөтөнчө мааниге ээ. Мисалы:

1. Транспортирдин жардамы менен эки жагы жана алардын арасындагы 30° тук бурчу боюнча үч бурчтук түзүү маселесин эң эле жеңил чыгарууга болот, ал эми ушул эле маселени кадимки жол менен, башкача айтканда, циркуль жана сызгычтын жардамы менен гана чыгаруу талап кылынса, анда маселени чыгаруу иши бир кыйла татаалдашат, ал туура алты бурчтукту (же туура он эки бурчтукту) түзүүгө байланыштуу.

2. Берилген түз сызыктын берилген чекитинде 40° тук бурчту түзүү маселеси транспортир менен эң эле жеңил иштелсе да, циркуль жана сызгычтар аркылуу аны эч бир чыгаруу мүмкүн эмес.

Циркулду жана сызгычты колдонуп, түзүүгө берилген геометриялык айрым татаал маселелерди чыгарууда, алардын чыгарылышына көмөкчү болгон бир катар жөнөкөй маселелерди чыгарууга туура келет. Аларды түзүүгө берилген жөнөкөй геометриялык маселелер деп атайбыз.

1-маселе. Берилген бурчка барабар бурчту түзгүлө.

$\angle AOB$ берилген (91-сүрөт). Ага барабар болгон *CDE* бурчун түзүү талап кылынат. Каалагандай *r* радиусу менен $\omega(O; r)$ жаасын сызабыз. Ал *AOB* бурчунун жактарын *K*, *L* чекиттеринде кесип өтөт.

DC шооласын сызып, ошол эле радиус менен $\omega_1(D;\,r)$ жаасын сызабыз. Ал DC ны M чекитинде кесет. DC шооласы боюнча аныкталган түз сызык аркылуу бөлүнгөн жарым тегиздиктердин биринде $\omega_2(M;\,KL)$ жаасын сызабыз. Анын ω_2 жаасы менен кесилиши N чекити болот. DN шооласын сызабыз. Натыйжада $\angle CDE=\angle AOB$ түзүлгөн болот.

Чындыгында, түзүү боюнча $\Delta KOL=\Delta MDN$ (тиешелүү үч жактары барабар). Анда $\angle KOL=\angle MDN$ же $\angle AOB=\angle CDE$ изделүүчү бурч болот.

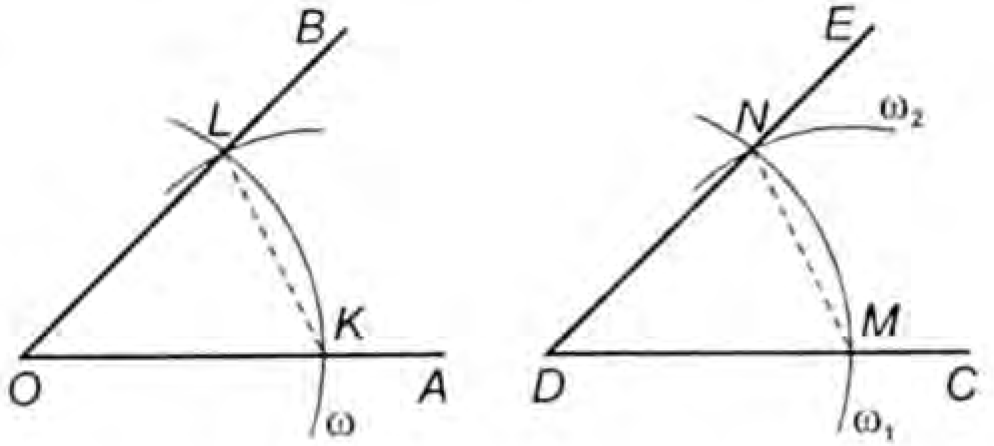
2 - маселе. Берилген бурчтун биссектрисасын түзгүлө. $\angle AOB$ берилген (92-сүрөт). Анын OE биссектрисасын түзөбүз. Каалагандай r радиусу менен $\omega(O;\,r)$ жаасын сызабыз. Ал берилген бурчтун жактарын C жана D чекиттеринде кесип өтөт. $\omega_1(C;\,r)$ жана $\omega_2(D;\,r)$ жааларынын кесилишкен чекитин (O дон айырмаланган) E аркылуу белгилейбиз. OE изделүүчү биссектриса болот. Анткени — $\Delta OCE=\Delta ODE$ (үч жагы боюнча) экендиги белгилүү. Мындан $\angle COE=\angle DOE$ же OE — биссектриса болот.

3 - маселе. Берилген кесиндини тең экиге бөлгүлө.

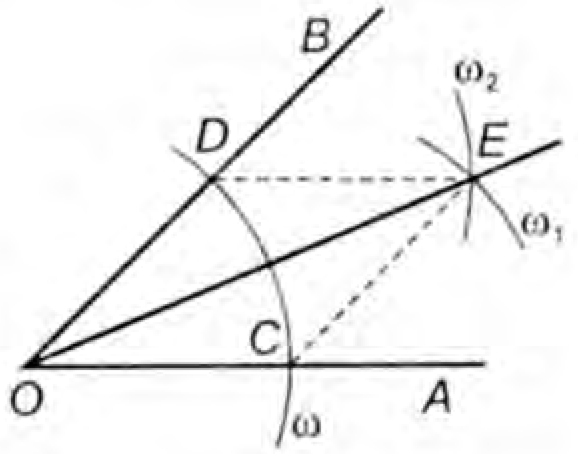
AB кесиндиси берилген (93-сүрөт). Аны тең экиге бөлөбүз. AB түз сызыгы тегиздикти жарым тегиздиктерге бөлөт. $\omega_1(A;\,AB)$ жана $\omega_1(B;\,AB)$ жарым айланаларын сызсак, алар ар түрдүү жарым тегиздиктерде жатышкан C жана C_1 чекиттеринде кесилишет. Ошондуктан CC_1 кесиндиси AB түз сызыгын O чекитинде кесип өтөт.

O чекити AB кесиндисин тең экиге бөлөт. Чындыгында эле, түзүү боюнча $\Delta ACC_1=\Delta BCC_1$, анда $\angle 1=\angle 2$ болот. Эми $\Delta ACO=\Delta BCO$ болоору түшүнүктүү (CO — жалпы жак, $AC=CB$, $\angle 1=\angle 2$). Натыйжада $AO=OB$ болот. Демек, O чекити AB кесиндисин тен экиге бөлөт.

Натыйжа. **Кесиндинин учтарынан бирдей алыстыкта жаткан чекиттердин геометриялык орду ал кесиндинин тең ортосу аркылуу өтүп, ага перпендикулярдуу болгон түз сызыкты аныктайт.**



91-сүрөт.



92-сүрөт.

Чындыгында CC_1 түз сызыгынын (93-сүрөт) ар бир чекити A жана B чекиттеринен бирдей алыстыкта жана $\angle AOC = \angle COB = 90°$.

4-маселе. Берилген чекит аркылуу өтүп, берилген түз сызыкка перпендикуляр түз сызыкты түзгүлө.

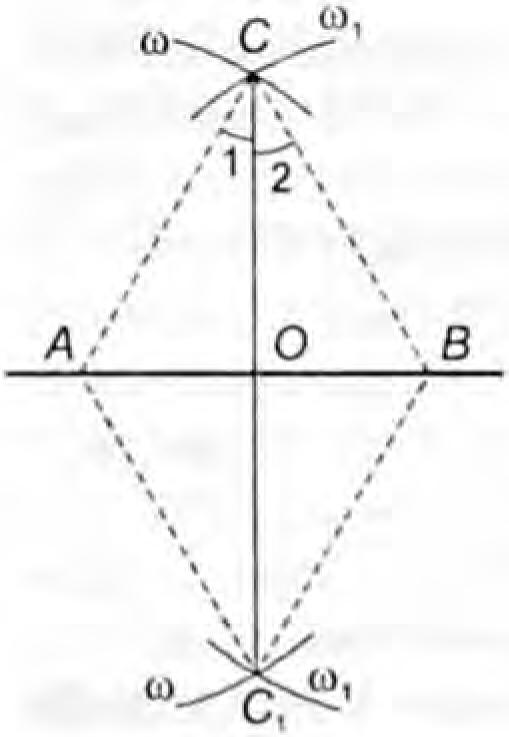
a түз сызыгы жана A чекити берилген. A чекити аркылуу өтүп, a түз сызыгына перпендикуляр b түз сызыгын түзөбүз. Эки учур болушу мүмкүн.

а) A чекити a түз сызыгында жатат (94-сүрөт). a түз сызыгында A чекитинин ар түрдүү жагында $CA=AD$ болгондой C жана D чекиттерин белгилейбиз. CA дан чоң болгон r радиус менен $\omega(C; r)$ жана $\omega_1(D; r)$ жааларын сызып, кесилишинде B чекитин табабыз. 3-маселенин натыйжасынын негизинде BA түз сызыгы изделүүчү b перпендикуляры болот.

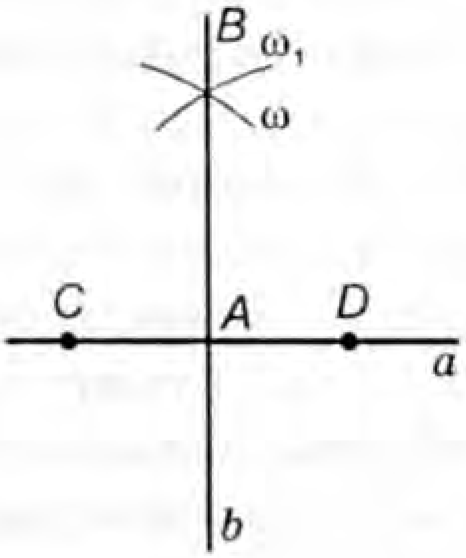
б) A чекити a түз сызыгынан тышкары жатат (95-сүрөт). a түз сызыгын эки чекитте (E жана F) кесип өткөндөй, каалагандай $\omega(A; r)$ жаасын сызабыз. a түз сызыгына карата A чекити жатпаган жарым тегиздикте $\omega_1(E; r)$ жана $\omega_2(F; r)$ жааларынын кесилишин табабыз, ал B болсун. 3-маселенин натыйжасынын негизинде $AB \perp a$ же $b \perp a$ болот. b – изделүүчү түз сызык.

5-маселе. Берилген түз сызыктан тышкары жаткан чекит аркылуу өтүп, ал түз сызыкка параллель болгон түз сызыкты түзгүлө.

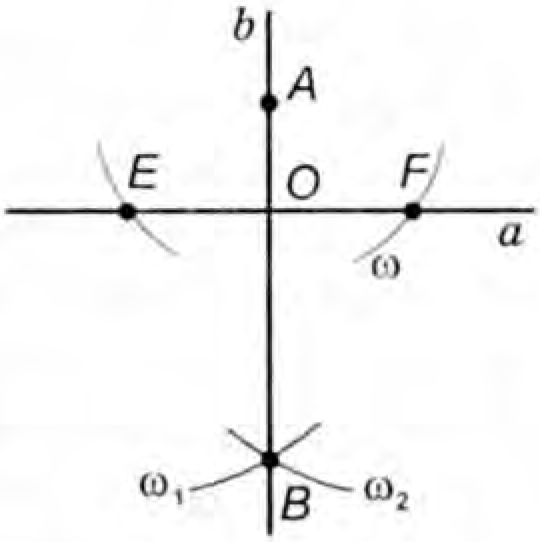
a түз сызыгы жана андан тышкары жаткан M чекити берилген (96-сүрөт). M чекити аркылуу өтүп, $a \| b$ болгондой b түз сызыгын түзөбүз. Андай түз сызык бирөө гана болот (V негизги касиеттин же аксиоманын негизинде). Аны түзүүнү түз сызыктардын



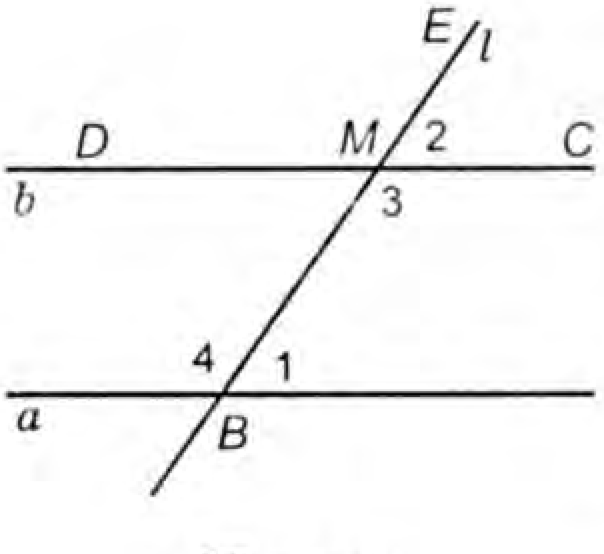
93-сүрөт.



94-сүрөт.



95-сүрөт.



96-сүрөт.

параллелдик белгилерине негиздеп ишке ашырууга болот. Ал үчүн M чекити аркылуу каалагандай l түз сызыгын жүргүзөбүз. Ал a ны B чекитинде кесет.

Эгерде M чекити аркылуу l түз сызыгы менен $\angle 4=\angle 3$ бурчун же $\angle 1=\angle 2$ бурчун түзгөндөй кылып b түз сызыгын жүргүзсөк, изделүүчү түз сызык түзүлгөн болот, андай түзүү 1-маселеде каралган.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. a кесиндиси берилген. Аны 4 барабар бөлүккө бөлгүлө.
2. Үч бурчтук берилген. Медианаларын түзгүлө.
3. a түз сызыгы берилген. Эгерде: а) AB кесиндиси a түз сызыгынын бир жагында жатса; б) AB кесиндисинин учтары a түз сызыгынын ар түрдүү жагында жатса, анда AB кесиндисинин a түз сызыгындагы проекциясын түзгүлө.
4. Үч бурчтук берилген. Бийиктиктерин түзгүлө.
5. a жана b бурчтары берилген. Берилген түз сызыктын бир жагында: а) $a+b$ суммасын; б) $a-b$ ($a>b$) айырмасын түзгүлө.
6. Үч бурчтук берилген. Ага барабар үч бурчтукту түзгүлө.
7. Үч жагы боюнча үч бурчтукту түзгүлө.
8. Тең жактуу үч бурчтуктун жагы a. Ал үч бурчтукту түзгүлө.
9. Каптал жагы жана негизи боюнча тең капталдуу үч бурчтук түзгүлө.
10. Эки жагы жана алардын арасындагы бурчу боюнча үч бурчтук түзгүлө.
11. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери берилген. Аны түзгүлө.
12. Бир жагы жана ага жанаша жаткан эки бурчу боюнча үч бурчтукту түзгүлө.
13. Негизи, ага жанаша жаткан бурчу боюнча тең капталдуу үч бурчтукту түзгүлө.
14. Жайылган бурчтун биссектрисасын түзгүлө.
15. Жандаш бурчтардын биссектрисаларын түзгүлө.
16. Берилген бурчту 4 барабар бөлүккө бөлгүлө.
17. Берилген бурчтан үч эсе чоң бурчту түзгүлө.
18. Айлананын берилген жаасын тең экиге бөлгүлө.
19. a түз сызыгы жана андан тышкары жаткан M чекити берилген. M чекити аркылуу өтүп a түз сызыгына параллель (перпендикуляр) болгон түз сызыкты түзгүлө.

20. Төмөнкү маселелерди чыгаргыла:

а) Үч бурчтуктун үч чокусунан бирдей алыстыкта турган чекитти тапкыла (ж о о б у : үч бурчтуктун үч жагынын ортолорунан аларга тургузулган перпендикулярлардын кесилиши болот);

б) Бурчтун жактарын кесүүчү түз сызыктан, бул бурчтун жактарынан бирдей алыстыкта турган чекитти тапкыла (ж о о б у : биссектриса менен кесүүчү түз сызыктын кесилиши болот);

в) Үч бурчтуктун үч жагынан бирдей алыстыкта турган чекитти тапкыла (ж о о б у : үч бурчтуктун биссектрисаларынын кесилишкен чекити болот).

§ 18. ТҮЗҮҮГӨ БЕРИЛГЕН МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУНУН ЭТАПТАРЫ

Түзүүгө берилген татаалыраак геометриялык маселелерди чыгарууда төмөндөгүдөй төрт этапты кароо сунуш кылынат.

Анализ. Бул түзүүгө берилген маселелерди чыгаруунун негизги этабы. Анткени мында түзүүнү аткаруунун системалуу планы иштелип чыгат. Ошондой эле, маселеде берилген элементтер менен түзүлө турган элементтердин ортосундагы байланыш көрсөтүлүп, түзүүнү аткаруунун жолдору жана удаалаштыгы аныкталат. Ошондуктан анализди түзүүгө берилген маселелерди чыгаруунун ачкычы деп аташат.

Анализди жүргүзүүдө изделүүчү фигураны түзүлдү деп эсептеп, маселенин шартын канааттандыруучу чиймени болжолдоп сызып коебуз. Андан кийин ал чийме боюнча берилген жана изделүүчү элементтерди ажыратып, алардын ортосундагы байланыш көрсөтүлөт. Ошону менен бирге берилген элементтер аркылуу изделүүчү элементтерди кантип түзүү керектиги аныкталат.

Түзүү. Анализдин негизинде берилген куралдардын (сызгыч, циркуль) жардамы менен изделүүчү фигураны түзүү аткарылат. Демек, түзүү куралдардын жардамы менен гана аткарылышы керек. Түзүүнүн аткарылуу удаалаштыгы анализдин негизинде жүргүзүлөт.

Түзүүдө аткарылган чийме анализдеги чиймеден бөлөк аткарылышы керек.

Маселенин шартында берилген фигуралар (кесинди, бурч, айлана ж. б.) түзүлгөн болот. Түзүүдө ошол фигуралардын чоңдуктары өзгөрүлбөстөн, курал менен өлчөнүп келип коюлат (түзүлөт). Демек, түзүүдө берилген фигураларды гана пайдаланабыз.

Далилдөө. Мында түзүлгөн фигура берилген маселенин шартын канааттандыра тургандыгы далилденет. Далилдөөдө геометриянын белгилүү аксиомалары, аныктамалары жана теоремалары колдонулат. Далилдөөнү жүргүзүүдө түзүүдө аткарылган чиймелерден пайдалануу керек.

Жөнөкөй маселелерди чыгарууда далилдөө талап кылынбайт.

Изилдөө төмөндөгүдөй суроолорго жооп берүү максатында жүргүзүлөт:

1) Маселенин шартында берилген элементтерди каалагандай кылып алганда деле маселе чыгарылышка ээ боло алабы? Кайсы учурда маселенин чыгарылышы болбойт, б. а. маселе чыгарылышка ээ эмес?
2) Маселенин чыгарылышы бирөөбү же көпбү?
3) Түзүүнү жөнөкөйлөштүрүүчү же тескерисинче, татаалдаштыруучу кандайдыр өзгөчө учурлар маселеде жокпу?

1 - маселе. Бир жагы, экинчи жагына жүргүзүлгөн медианасы жана бул медиана менен берилген жактын арасындагы бурчу боюнча үч бурчтук түзгүлө (97-сүрөт).

Берилди. *a* жагы (кесиндиси), m_b — медианасы, α бурчу (97-сүрөт).

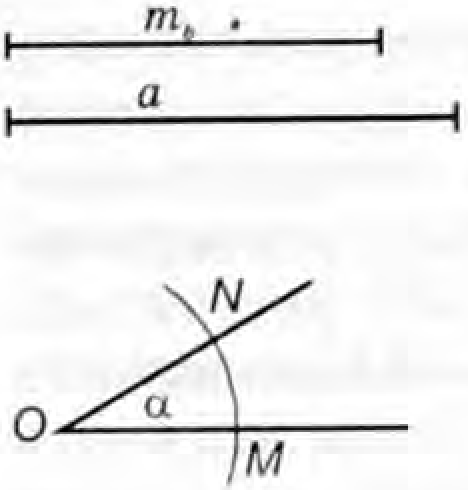
Анализ. Изделүүчү үч бурчтукту түзүлдү деп эсептейли. Ал *ABC* үч бурчтугу болсун (98-сүрөт). $BC=a$, *D* чекити *AC* жагынын ортосу, $BD=m_b$, $\angle CBD=\alpha$ деп эсептейли.

Үч бурчтукту түзүү үчүн анын үч чокусун түзүү жетиштүү болот. Мында *B* жана *C* чокуларын оңой түзүүгө болот. Ал үчүн каалагандай *l* түз сызыгын алып, андан *B* чекитин белгилейбиз. Андан кийин $BC=a$ болгондой кылып, циркулдун жардамы менен *a* кесиндисин өлчөп коюп, *C* чокусун түзөбүз.

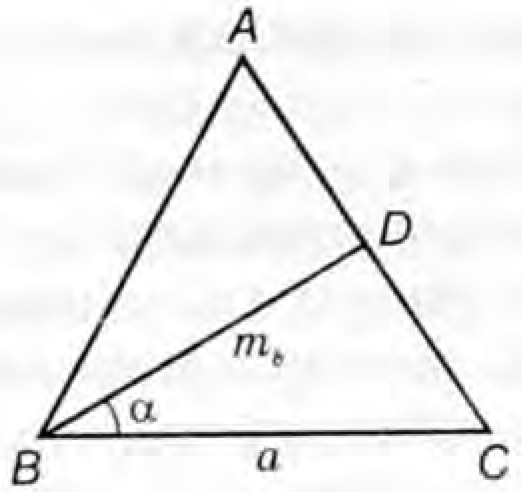
Эми *A* чокусун түзүү үчүн маселенин калган шарттарынан пайдаланабыз. Маселенин шарты боюнча, *BD* медиана болгондуктан, *D* чекити *AC* жагынын тең ортосунда жатат. *BDC* үч бурчтугун оңой түзө алабыз: эки жагы жана алардын арасындагы бурчу белгилүү. Андан кийин *CD* жагын улантып, ага $DA=CD$ кесиндисин өлчөп коюп *A* чокусун түзүүгө болот. Ошентип, маселени түзүү жолу табылды.

Түзүү. Бул түзүүгө карата иштелип жаткан биринчи маселе болгондуктан, түзүүнүн аткарылышына толук токтолобуз.

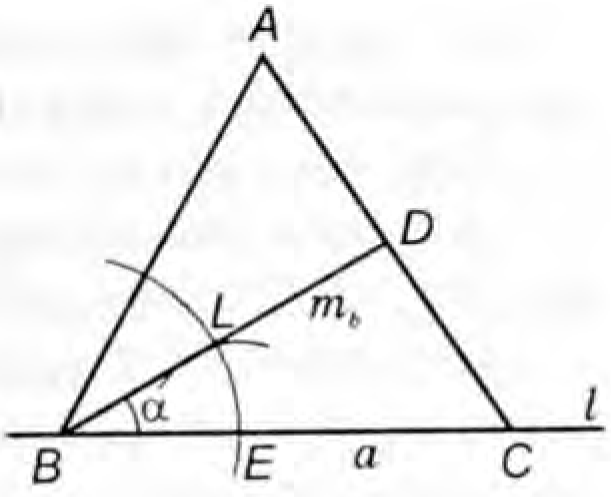
l түз сызыгын сызып, андан эркибизче *B* чекитин белгилейбиз (99-сүрөт). Түзүү 97-сүрөттө берилгендер аркылуу аткарылат. *l* түз сызыгына *B* дан баштап *a* кесиндисин циркулдун жардамы менен өлчөп коюбуз да, *C* чекитин түзөбүз ($BC=a$). Эми $\angle CBD=\alpha$ болгондой кылып α бурчун түзөбүз. Ал үчүн $\omega(O;\, OM)$



97-сүрөт.



98-сүрөт.



99-сүрөт.

аркылуу (97-сүрөт) эркибизче MN жаасын сызабыз (1-маселе). Андан кийин дагы $\omega_1(B;\ OM)$ жана $\omega_2(E;\ MN)$ жааларын сызабыз (99-сүрөт). ω_1 жаасы BC жагын E чекитинде кесип өтөт. Ал эми ω_1 жана ω_2 жаалары L чекитинде кесилишет. Натыйжада $\angle CBL=\alpha$ болот. Андан кийин BL шооласына $BD=m_b$ кесиндисин (берилген боюнча) түзүп, D чекитин табабыз. Эми CD шооласына D дан баштап $CD=DA$ кесиндисин өлчөп коюп, A чокусун түзөбүз. A, B, C чекиттерин кесиндилер аркылуу туташтырсак, изделүүчү ABC үч бурчтугу түзүлгөн болот.

Далилдөө. Далилдөө дайыма түзүүдө аткарылган чиймеге (99-сүрөткө) карата жүргүзүлөт. Түзүлгөн ABC үч бурчтугу маселенин шартын канааттандырат. Анткени түзүү боюнча $BC=a$, $\angle CBD=\alpha$, $BD=m_b$. Ошондой эле $CD=DA$ болгондуктан, $BD=m_b$ медиана болот. Демек, түзүлгөн ABC үч бурчтугунун бардык элементтери берилген маселенин шартын канааттандырып жатат.

Изилдөө. a жагынын жана m_b медианасынын каалагандай узундуктарында маселенин чыгарылышы болот. Ал эми α бурчу $0<\alpha<180°$ шартын канааттандырганда гана маселенин чыгарылышы болот. Бул учурда BCD үч бурчтугун, демек ABC үч бурчтугун дайыма түзө алабыз. Бирок, $\alpha\geq180°$ болгондо маселенин чыгарылышы болбойт, анткени үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 180° ка барабар болгондуктан, анын ар бир бурчу, ошондой эле бир чокудан чыгуучу медиана менен жактын түзгөн бурчу дайыма 180° тан кичине болушу керек.

Ошентип, маселенин бир гана чыгарылышы бар. Себеби маселенин шартында берилген чондуктарды бир түрдүү гана жол менен түзүүгө болот.

Женил маселелерди чыгарууда бул төрт этапты тең жүргүзүп олтуруунун зарылчылыгы деле жок.

2-маселе. Эки жагы жана бул эки жагынын кыскасынын каршысында жаткан бурчу боюнча үч бурчтук түзгүлө (бул учурда эки же бир чыгарылыш келип чыгат же бир да чыгарылышы болбой калат).

Бул маселенин чыгарылышына толугураак токтололу.

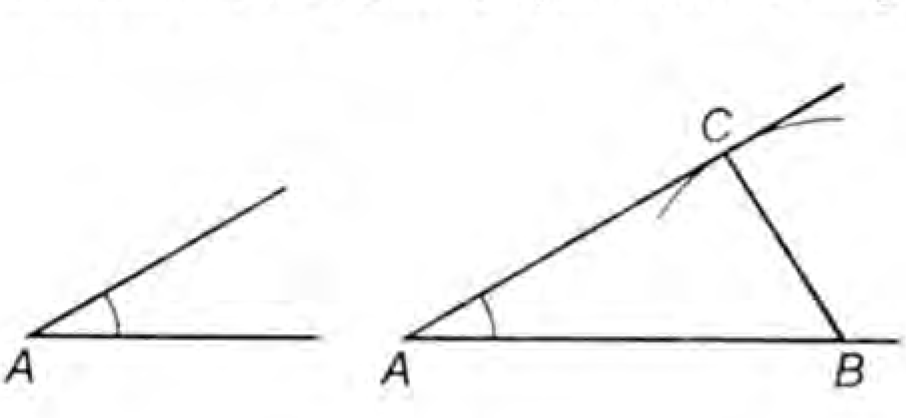
Анализ. Маселени чыгаруунун планын түзүү үчүн ал чыгарылды деп болжолдойбуз, башкача айтканда, *ABC* үч бурчтугунун ($99^{\text{а}}$-сүрөт) *AB* жана *BC* жактары жана $BC<AB$ болгондуктан *A* бурчу берилген болсун. Мындай шартта *ABC* үч бурчтугун түзүү үчүн эң мурда *A* бурчуна барабар болгон бурчту түзүп, аның бир жагына чокудан тартып узун жакты ченеп коюу менен үч бурчтуктун эки чокусуна (*A* жана *B*) ээ боло тургандыгыбыз сүрөттөн ачык көрүнүп турат. Үч бурчтуктун үчүнчү *C* чокусун табуу үчүн борбору *B* чокусунда, радиусу кыска жакка барабар болгон жаа сызабыз. Үч бурчтуктун үчүнчү *C* чокусу ушул жаа менен бурчтун экинчи жагынын кесилишинен табылат.

Түзүү. Берилген бурчка барабар болгон бурчту түзүп, чокудан баштап анын бир жагына берилген эки жактын узунун ченеп коебуз. Узун жактын экинчи учун (бурчтун чокусунда жатпаган учун) борбор кылып алып, кыска жакка барабар болгон радиус менен айлана сызабыз, бул айлана бурчтун экинчи жагы менен кесилишип, бизге үч бурчтуктун үчүнчү чокусун берет.

Синтез (далилдөө). Жогоруда айтылган түзүүдөн келип чыккан үч бурчтук изделүүчү үч бурчтук болот, анткени, ал үч бурчтук маселенин бардык талаптарын канааттандырат, чындыгында эле, *A* бурчу берилген бурчка барабар болуп курулду. *AB* жагы берилген жактардын узунуна барабар болуп, *BC* жагы берилген жактардын кыскасына барабар болуп курулду жана *A* бурчу берилген жактардын кыскасынын каршысында жайланыштырылды.

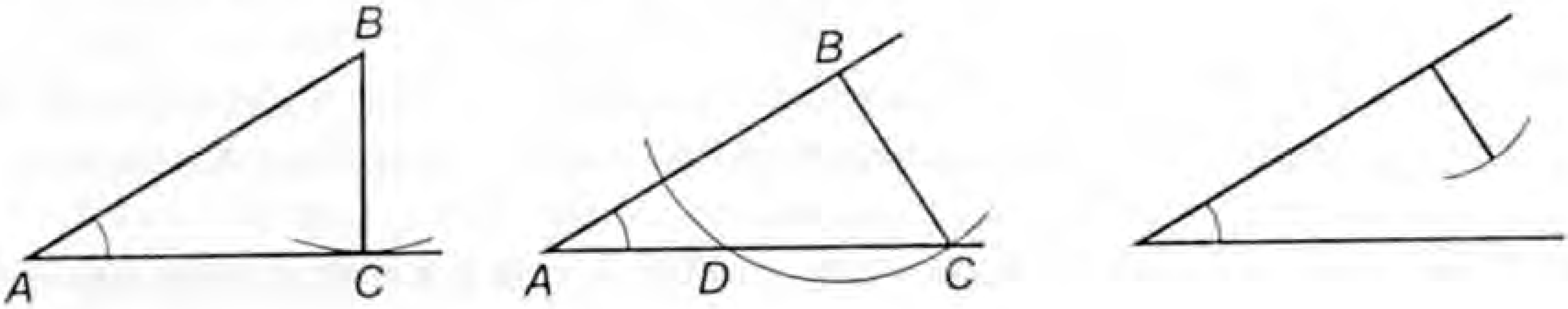
Изилдөө. Бул маселе өзүнүн шартында берилгендердин бардык маанилеринде тең эле бир гана чыгарылышка ээби же дагы башка чыгарылышка ээ болушу да мүмкүнбү?

Берилген кыска жактын каршысында боло тургандыктан ал бурч дайыма сөзсүз тик бурчтан кичине болуу керек, мындай болбогон учурда узун жакка каршы жаткан бурч тик бурчтан ого бетер чоң болуп кетер эле (демек, үч бурчтуктун эки эле бурчунун суммасы $2d$ дан ашып кетет).



$99^{\text{а}}$-сүрөт.

Ошентип, берилген тар бурчтун түрдүү маанисине карай маселе же бир гана чыгарылышка (бул учурда изделүүчү үч бурчтук тик бурчтуу үч бурчтук болот, мында B борборлуу BC радиустуу айлана AC түз сызыгын бир гана M чекитинде жанып өтөт) же эки чыгарылышка (бул учурда изделүүчү үч бурчтуктардын бири кең бурчтуу экинчиси тар бурчтуу болот. Мында B борборлуу BC радиустуу айлана AC түз сызыгын эки чекитте кесип өтөт), ээ боло тургандыгы же бир да чыгарылышка ээ боло албай тургандыгы (бул учурда B борборлуу BC радиустуу айлана AC түз сызыгы менен кесилишпейт жана жанышпайт) $99^{б}$-сүрөттөн көрүнүп турат.



$99^{б}$-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. l түз сызыгы жана андан тышкары жаткан M чекити берилген. l түз сызыгында M чекитинен a аралыкта жаткан чекитти тапкыла. a нын маанисине карата маселенин чыгарылышын изилдегиле.
2. Берилген A чекитинен a аралыкта, B чекитинен b аралыкта жаткан чекиттерди түзгүлө. Кандай шартта маселенин чыгарылышы болот? Кандай шартта маселенин чыгарылышы болбойт?
3. Берилген A жана B чекиттери аркылуу ($AB=b$) өтүүчү жана радиусу a га барабар болгон айлананы түзгүлө.
4. Берилген борбордош эки айлананы жанып өтүүчү айлананы түзгүлө. Андай айланалардын борборлорунун геометриялык орду (г. о.) кандай фигура болот?
5. Тең капталдуу үч бурчтуктун: а) каптал жагы жана чокусундагы бурчу; б) каптал жагы жана негизиндеги бурчу; в) негизи жана ага түшүрүлгөн бийиктиги берилген. Үч бурчтукту түзгүлө.
6. Тик бурчтуу үч бурчтукту анын: а) катети жана гипотенузасы; б) катети жана тар бурчу; в) гипотенузасы жана тар бурчу боюнча түзгүлө.
7. Үч бурчтуктун эки жагы жана алардын биринин каршысында жаткан бурчу берилген. Үч бурчтукту түзгүлө.
8. Үч бурчтук берилген. Анын бир чокусу аркылуу каршысында жаткан жакка параллель түз сызык жүргүзгүлө.

9. Эки жагы жана алардын бирине жүргүзүлгөн: а) медианасы; б) бийиктиги боюнча үч бурчтукту түзгүлө.

10. Катети жана сырттан сызылган айлананын радиусу боюнча тик бурчтуу үч бурчтукту түзгүлө.

11. а) Негизине түшүрүлгөн бийиктиги жана эки каптал жагы; б) жагы, ага түшүрүлгөн бийиктиги жана медианасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

§ 19. АЙЛАНАГА ЖАНЫМА ТҮЗ СЫЗЫК

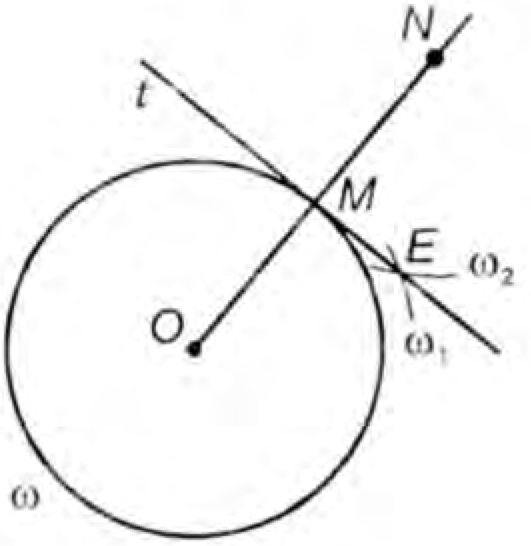
$\omega(O; R)$ айланасы берилген. M чекитинен айланага жүргүзүлгөн жаныманы түзүүнү карайбыз. Ал § 15 ги теоремаларга негизделет. Эки учур болушу мүмкүн.

а) M чекити айланада жатат (100-сүрөт). t изделүүчү жанымa болсун. Анда $OM \perp t$ болот.

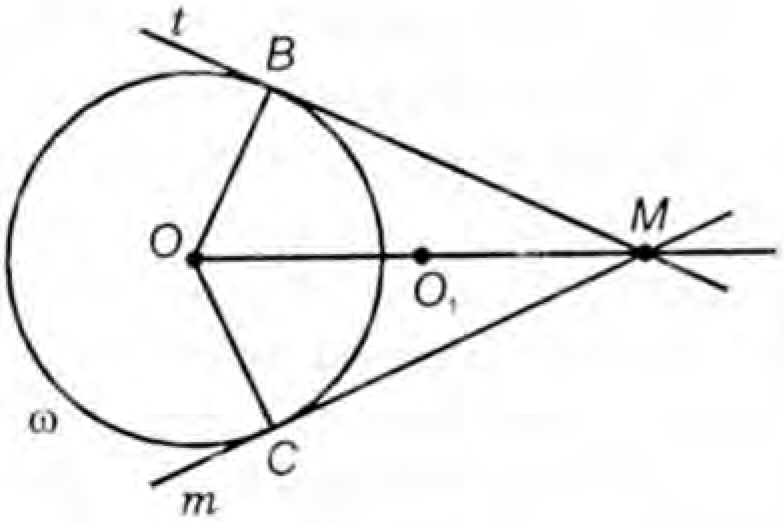
Бул t жанымасын түзүш үчүн OM дин уландысына $MN=OM$ түзүп, $\omega_1(O; r)$ жана $\omega_2(N; r)$ жааларын сызабыз (§ 18. 4-маселе), мында $r>R$ болгондо кылып алабыз. Жаалардын кесилишин E чекити аркылуу белгилейбиз. ME түз сызыгы, б. а. t изделүүчү жаныма болот.

б) M чекити $\omega(O; R)$ айланасынын сыртында жатат (101-сүрөт). M чекитинен жүргүзүлгөн жаныма t, жануу чекити B болсун. $OB \perp t$ болоору белгилүү (§ 15, 32-теорема).

B жануу чекитин табыш үчүн OMB тик бурчтуу үч бурчтугун түзөбүз. $OO_1=O_1M$ болгондой O_1 чекитин таап, $\omega_1(O_1, OM)$ айланасын сызабыз. Ал ω айланасын B жана C чекиттеринде жанып өтөт. MB жана MC түз сызыктары, б. а. t жана m түз сызыктары жанымалар болот. Демек, айланадан тышкары жаткан чекиттен ал айланага эки жаныма жүргүзүүгө болот.



100-сүрөт.



101-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Айлана берилген. Бири-бирине перпендикулярдуу болгон *AB* жана *CD* диаметрлерин түзгүлө.
2. Айлана жана анын *AB* диаметри берилген. Ал диаметр менен: а) 45° бурчту түзүүчү *AC* хордасын; б) 60° бурчту түзүүчү *AD* хордасын түзгүлө.
3. Берилген бурчтун жактарын жанып өтүүчү, берилген радиустагы айлананы түзгүлө.
4. Параллель эки түз сызыкты жанып өтүүчү айланалардын борборлорунун геометриялык орду кандай фигура болот? Аны түзгүлө.
5. Берилген түз сызыкты жанып өтүүчү барабар айланалардын борборлорунун геометриялык орундары кандай фигуралар болот? Аларды түзгүлө.
6. Берилген бурчтун жактарын жанып өтүүчү айланалардын борборлорунун геометриялык ордун тапкыла. Аны түзгүлө.
7. Берилген айлананы жана берилген түз сызыкты жанып өтүүчү берилген радиустагы айлананы түзгүлө.
8. Борборлош эмес жана бири экинчисинин ичинде жатпаган эки айлана берилген. Алардын жалпы жанымасын түзгүлө.
9. Жанышуучу эки айлананын жалпы жанымасын түзгүлө.

§ 20. ҮЧ БУРЧТУККА ИЧТЕН (СЫРТТАН) СЫЗЫЛГАН АЙЛАНАЛАР

Үч бурчтуктун чокулары аркылуу өтүүчү айлананы ал үч бурчтукка сырттан сызылган айлана деп атайбыз. Анда *ABC* үч бурчтугуна сырттан сызылган айлананын борбору *O* чекити болсо, анда $OA=OB=OC$ болоору түшүнүктүү. Демек, үч бурчтукка сырттан сызылган айлананын борбору анын жактарынын тең ортолору аркылуу өткөн перпендикулярдын кесилишинде жатат, анткени $OA=OB$ болгондой *O* чекити *AB* кесиндисинин ортосу аркылуу өткөн перпендикулярда жатат, $OB=OC$ үчүн да ушунун өзүн айтууга болот (жогоруда белгилүү).

Натыйжада: бир түз сызыкта жатпаган үч чекит аркылуу бир гана айлананы жүргүзүүгө болот деген корутундуга келебиз.

Аныктама. **Үч бурчтуктун жактарын жанып өтүүчү айлана үч бурчтукка ичтен сызылган айлана деп аталат.**

Эгерде түз сызык айлананы жанып өтсө, ал жануу чекитине жүргүзүлгөн радиуска перпендикулярдуу болот (§ 15, 32-теорема). Бул түшүнүктөрдүн негизинде төмөндөгүнү айтуу мүмкүн. Эгерде *O* чекити *ABC* үч бурчтугуна ичтен сызылган айлананын борбору болсо, анда OM, OD, OE кесиндилери өз ара барабар жана үч бурчтуктун AB, BC, CA жактарына тиешелүү түрдө перпендикулярдуу болушкандыктан, O борбору жана OM радиусу боюнча жүргүзүлгөн айлана үч бурчтуктун жактарын M, D, E чекиттеринде жанып өтөт. Ал үч бурчтукка ичтен сызылган айлана болот. Демек, үч бурчтукка ичтен сызылган айлананын борбору үч бурчтуктун биссектрисаларынын кесилишинде жатат. Андай айлана бирөө гана болот. Анткени O борбору, OM радиусу бир гана түрдүү жол менен аныкталат.

Демек, берилген үч бурчтукка ичтен сызылган айлананы түзүү үчүн үч бурчтуктун эки бурчунун биссектрисаларын түзүү керек. Алардын кесилиши изделүүчү айлананын борбору болот. Ал борбордон үч бурчтуктун кандайдыр бир жагына перпендикуляр жүргүзөбүз. Ал перпендикулярдын узундугун радиус кылып айлана сызабыз. Ал изделүүчү айлана болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Айлана берилген. Ага ичтен сызылган каалагандай үч бурчтукту түзгүлө.
2. Үч бурчтук берилген. Анын жактарынын тең ортолору аркылуу өтүп, тиешелүү жагына перпендикулярдуу болушкан түз сызыктарды түзгүлө.
3. Үч бурчтуктун жактарынын тең ортолору аркылуу өтүп, тиешелүү жактары перпендикулярдуу болгон түз сызыктар бир чекитте кесилишээрин далилдегиле.
4. Берилген үч бурчтукка сырттан сызылган айлананы түзгүлө.
5. Тик бурчтуу үч бурчтукка сырттан сызылган айлананы түзгүлө, аны оңой түзүү жолун көрсөткүлө.
6. Үч бурчтуктун бийиктиктеринин бир чекитте кесилишээрин далилдегиле.

   Көрсөтмө. Берилген үч бурчтуктун ар бир чокусу аркылуу каршысында жаткан жакка параллель түз сызыктар жүргүзгүлө. Берилген үч бурчтуктун бийиктиктери жаңы алынган үч бурчтуктун жактарынын тең ортолоруна түшүрүлгөн перпендикулярлар болушат. Эми 3-маселени пайдалангыла.
7. Үч бурчтук берилген. Бурчтарынын биссектрисаларын түзгүлө.
8. Үч бурчтуктун бурчтарынын биссектрисалары бир чекитте кесилишээрин далилдегиле.

   Көрсөтмө. Бурчтун биссектрисасынын ар бир чекити жактарынан бирдей алыстыкта болоорунан пайдалангыла. Эки бурчунун биссектрисаларынын кесилишкен чекити үчүнчү бурчтун биссектрисасында жатаарын далилдөө керек.

9. Үч бурчтук берилген. Ага ичтен сызылган айлананы түзгүлө.
Көрсөтмө. 8-маселенин чыгарылышынан пайдалангыла. Берилген үч бурчтуктун ички бурчтарынын биссектрисаларынын кесилишкен чекитин ичтен сызылган айлананын борбору катары алууга болот.

10. Туура үч бурчтукта: а) ичтен; б) сырттан сызылган айлананы түзүүнүн оңой жолдорун көрсөткүлө.

11. ABC үч бурчтугу берилген. A бурчунун жана B, C бурчтарынын тышкы бурчтарынын биссектрисаларынын кесилишин тапкыла.

12. Берилген үч бурчтуктун сыртына ичтен сызылган айлананы түзгүлө.
Көрсөтмө. 11-маселенин чыгарылышынан пайдалангыла.

13. Эки жагы жана сырттан сызылган айлананын радиусу боюнча үч бурчтук түзгүлө.

14. Бир жагы, анын чокусундагы бурчу жана ичтен сызылган айлананын радиусу боюнча үч бурчтукту түзгүлө.

IV ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Геометриялык түзүүгө түшүнүк бергиле.
2. Түзүүгө берилген геометриялык маселелердин чыгарылышы деп эмнени түшүнөбүз?
3. Маселелерди чыгарууда кандай куралдар колдонулат? Алардын ролу кандай?
4. Маселелерди чыгаруу кандай этаптардан турат?
5. Түзүүгө берилген жөнөкөй маселелерди санап бергиле.
6. Айланада жаткан чекит аркылуу ага жаныманы кантип жүргүзөбүз?
7. Айланадан тышкары жаткан чекиттерден айланага жаныма кантип жүргүзүлөт? Канча жаныма жүргүзүлөт?
8. Үч бурчтукка сырттан сызылган айлананын борбору кантип табылат?
9. Үч бурчтукка ичтен сызылган айлананын борбору кайсы жерде болот?

IV ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. Берилген чекиттен жана берилген түз сызыктан a аралыкта жаткан чекитти түзгүлө.

2. Негизи, каршысында жаткан бурчу жана каптал жагы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

3. Бир бурчу жана ал бурчтун жактарына түшүрүлгөн бийиктиктери боюнча үч бурчтук түзгүлө.

4. Негизи, жанаша жаткан бурчу жана негизине түшүрүлгөн бийиктиги боюнча үч бурчтук түзгүлө.

5. Эки жагы жана алардын бирине түшүрүлгөн бийиктиги боюнча үч бурчтук түзгүлө.

6. Бир жагы, ага жанаша жаткан бурчу жана ал жакка жүргүзүлгөн медианасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

7. Жагы, ага жанаша жаткан бурчу жана ал бурчтун биссектрисасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

8. Тик бурчтуу үч бурчтук түзгүлө: а) эки катети боюнча; б) гипотенузасы жана ага түшүрүлгөн бийиктиги боюнча.

9. Жагы, ага түшүрүлгөн медианасы жана калган эки жагынын бирине түшүрүлгөн бийиктиги боюнча үч бурчтук түзгүлө.

10. Катети жана экинчи катети менен гипотенузасынын суммасы боюнча тик бурчтуу үч бурчтук түзгүлө.

Көрсөтмө. $BC=a$ жана $DC=b+c$ катеттери боюнча BDC тик бурчтуу үч бурчтугун түзгүлө. BD жагынын тең ортосу аркылуу түз сызык жүргүзгүлө.

11. A, B эки бурчу жана эки жагынын $b+c$ суммасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

Көрсөтмө. ABC үч бурчтугу түзүлдү деп эсептеп, AB жагынын уландысына $DA=AC$ кесиндисин өлчөп койгула. ACD тең капталдуу үч бурчтук болот. Андан $\angle CDA=\angle DCA=\frac{1}{2}\angle\mathrm{A}$ экендиги оңой байкалат. DC жагынын ортосу аркылуу өтүүчү перпендикуляр түз сызыкты түзгүлө.

12. A чекити аркылуу өтүүчү R радиустагы айлананы түзгүлө.

13. A чекити аркылуу өтүп, берилген түз сызык аркылуу тең экиге бөлүнүүчү берилген радиустагы айлананы түзгүлө.

14. Берилген чекит аркылуу өтүп, берилген айлананы жануучу берилген радиустагы айлананы түзгүлө.

15. Параллель эки түз сызык жана аларда жатпаган M чекити берилген. Берилген түз сызыктарды жанып, M чекити аркылуу өтүүчү айлананы түзгүлө.

16. Ичтен жанышуучу эки айлана берилген. Алардын бирин сырттан, экинчисин ичтен жанып өтүүчү айлананы түзгүлө.

17. Ичтен жанышуучу эки айлана берилген. Алардын экөөнү тең сырттан (ичтен) жанып өтүүчү айлананы түзгүлө. Мындай канча айлана болушу мүмкүн?

18. Сырттан жанышуучу эки айлана берилген. Алардын ар бирине ичтен жанып өтүүчү айлананы түзгүлө.

19. Айлана сызылып, бирок борбору көрсөтүлгөн эмес. Чийме үч бурчтугун пайдаланып, ал айлананын борборун түзгүлө.

20. Айлана сызылып, бирок борбору көрсөтүлгөн эмес. Эгерде ал айлананын радиусунун a кесиндисине барабар экендиги белгилүү болсо, анда жалаң гана циркулдун жардамы менен анын борборун кантип түзүүгө болоорун көрсөткүлө.

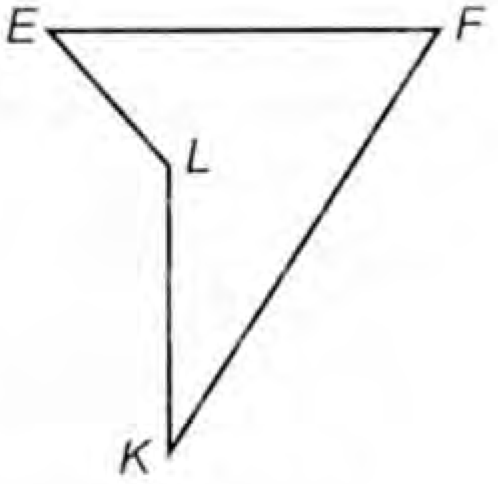
V глава ТӨРТ БУРЧТУКТАР

§ 21. ТӨРТ БУРЧТУКТАР ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

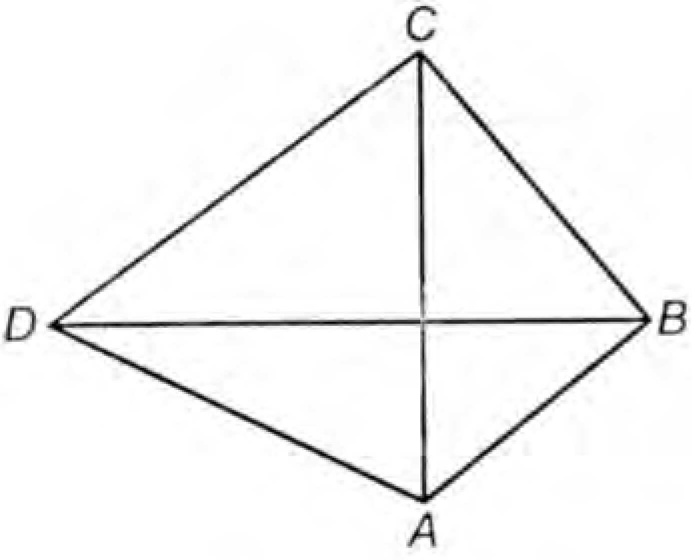
Аныктама: **Ар бир үч чекити бир түз сызыкта жатпаган төрт чекиттен жана аларды эки-экиден туташтыруучу төрт кесиндиден турган фигура төрт бурчтук деп аталат.**

Чынында эле ар бир үч чекити бир түз сызыкта жатпаган төрт чекитти удаалаш, бири-бири менен кесилишпей турган кесиндилер аркылуу туташтырсак төрт бурчтукту алабыз. Тагыраак айтканда, A, B, C, D төрт чекит берилсе, аларды удаалаш түрдө кесиндилер аркылуу туташтырып төрт бурчтукка ээ болобуз, аны $ABCD$ аркылуу белгилейли (102-сүрөт). A, B, C, D — анын чокулары, AB, BC, CD, DA — жактары, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle DAB$ анын бурчтары болуп эсептелишет. A жана C, B жана D карама-каршы чокулар болушат.

Карама-каршы чокуларын туташтыруучу кесиндилер (AC, BD) диагоналдар деп аталышат. Бир жагына жанаша жатпаган бурчтар төрт бурчтуктун карама-каршы бурчтары ($\angle ABC$ жана $\angle CDA$, $\angle BCD$ жана $\angle DAB$) болуп эсептелишет. Ошондой эле, жалпы учу болбогон жактар карама-каршы жактар (AB менен CD, BC менен AD) деп аталышат. Демек, төрт бурчтуктун төрт чокусу, төрт жагы жана төрт бурчу болот, бирок төрт бурчтуктар ар кандай болушу мүмкүн: томпок жана томпок эмес. Эгерде төрт бурчтуктун каалаган жагы аркылуу түз сызык жүргүзгөндө төрт бурчтук ошол түз сызык аркылуу бөлүнгөн жарым тегиздиктердин биринде жатса, анда төрт бурчтук томпок, андай болбогон учурда ал томпок эмес болот. Жогорудагы $ABCD$ төрт бурчтугу томпок, ал эми $EFKL$ төрт бурчтугу (102-сүрөт) томпок эмес, анткени ал төрт бурчтук KL же EL түз сызыктары аркылуу бөлүнгөн жарым тегиздиктердин биринде эле жатпайт.



102-сүрөт.



103-сүрөт.

Биз мындан ары томпок төрт бурчтуктарга токтолобуз, ошондуктан аларды оңтойлуу болсун үчүн, жөн эле төрт бурчтук деп атайбыз. Төрт бурчтуктун жактарынын суммасы анын **периметри** деп аталат.

34-теорема. **Төрт бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 360° ка барабар.**

Далилдөө. *ABCD* төрт бурчтугу берилсин (103-сүрөт). *AC* диагоналы аны эки үч бурчтукка бөлөт: ΔABC жана ΔACD. Бул үч бурчтуктардын ички бурчтарынын суммасы берилген төрт бурчтуктун ички бурчтарынын суммасына барабар. Ар бир үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 180°. Ошондуктан төрт бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 360° болот. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. а) *ABCD* томпок; б) *KLMN* томпок эмес төрт бурчтуктарын сызгыла. Томпок жана томпок эмес төрт бурчтуктардын айырмасын түшүндүрүп бергиле; в) чокуларын, жактарын, бурчтарын жана карама-каршы чокуларын белгилеп көрсөткүлө; г) диагоналдарын атагыла.
2. Томпок төрт бурчтуктун жактары 8 см, 12 см, 6 см, 11 см болсо, периметрин эсептегиле.
3. Төрт бурчтуктун бир жагынын узундугу калган үч жагынын узундуктарынын суммасынан кичине болоорун далилдегиле.
4. Төрт бурчтуктун жактары 2 см, 6 см, 9 см, 17 см болушу мүмкүнбү?
5. Төрт бурчтук диагоналы аркылуу эки үч бурчтукка бөлүнгөн. Эгерде үч бурчтуктардын, төрт бурчтуктун периметрлери тиешелүү түрдө 30 м, 34 м жана 36 м болсо, төрт бурчтуктун диагоналын тапкыла.
6. Жактары a, бир диагоналы d болсо, төрт бурчтукту түзгүлө.
7. Төрт бурчтуктун жактарынын катышы 4:5:8:2 катышына барабар, ал эми периметри 57 дм. Жактарын тапкыла.
8. Төрт бурчтуктун жактарынын катышы 3:1:5:11 катышына барабар болушу мүмкүнбү?
9. Төрт бурчтуктун бир бурчу 112° болсо, калган бурчтарынын суммасын тапкыла.

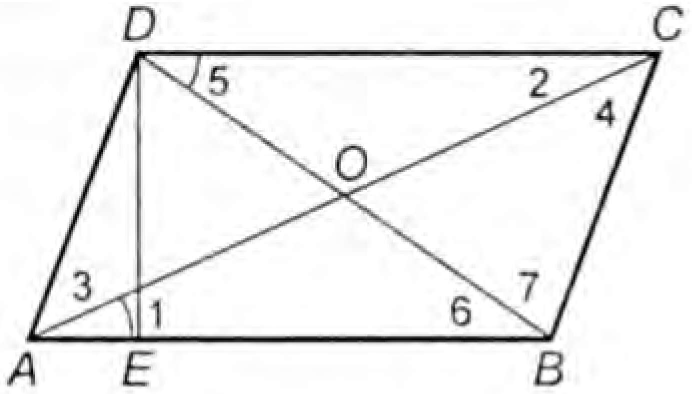
10. Эгерде төрт бурчтуктун 3 бурчу тик болсо, анда төртүнчү бурчу да тик болоорун далилдегиле.

11. Эгерде төрт бурчтуктун бурчтарынын катышы 3:5:6:1 катышына барабар болсо, анын ар бир бурчун тапкыла.

12. *ABCD* төрт бурчтугунда $\angle A:\angle B:\angle C:\angle D=6:7:8:9$. Бул төрт бурчтуктун параллель жактары барбы?

13. Эгерде төрт бурчтуктун эки бурчунун катышы 5:7 катышына барабар, үчүнчү бурчу алардын айырмасына, ал эми төртүнчү бурчу үчүнчү бурчунан 24° ка кичине болсо, төрт бурчтуктун бурчтарын тапкыла.

§ 22. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ



104-сүрөт.

Карама-каршы жаткан жактары параллель болгон төрт бурчтук **параллелограмм**[1] деп аталат.

104-сүрөттө *ABCD* параллелограммы көрсөтүлгөн: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Томпок төрт бурчтуктун чокулары, жактары, бурчтары, карама-каршы чокулары, ошондой эле диагоналдары, периметри кандай аныкталса, параллелограммда да алар ошондой эле аныкталышат. Анткени параллелограмм томпок төрт бурчтук. Чындыгында эле, параллелограмм ар бир жагы аркылуу жүргүзүлгөн түз сызык аркылуу түзүлгөн жарым тегиздиктеринин биринде гана жатат.

Параллелограммдын бир чокусунан каршысында жаткан жакка түшүрүлгөн перпендикуляр анын бийиктиги деп аталат. $DE \perp AB$, анда *DE* кесиндиси параллелограммдын *D* чокусунан *AB* жагына түшүрүлгөн бийиктиги болот.

35-теорема. **Параллелограммдын карама-каршы жактары барабар.**

Ал *ABC* жана *ACD* үч бурчтуктарынын барабардыгынан келип чыгат (*AC* — жалпы жак, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$). Демек, $AB=DC$, $BC=AD$ болот.

Натыйжалар.

1. Параллелограммдын карама-каршы бурчтары барабар.

---

[1] Грек сөзү, карама-каршы жактары параллель болгон төрт бурчтук дегенди түшүндүрөт.

2. Параллелограммдын диагоналдары кесилишкен чекитте тең экиге бөлүнүшөт. Бул $\Delta ABO=\Delta CDO$ ($AB=DC$, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 6=\angle 5$,) дегенден келип чыгат. $AO=OC$, $BO=OD$ болот.
3. Параллелограммдын бир жагына жанаша жаткан бурчтардын суммасы 180° ка барабар.

Бул эки түз сызыктын параллелдик белгисинен келип чыгат.

35-теорема жана андан келип чыгуучу 1, 2, 3-натыйжалардын ар бирине карата айтылган тескери сүйлөмдөр да туура болот. Алар төмөндөгүдөй сүйлөмдөр.

36-теорема. **Эгерде томпок төрт бурчтуктун:**

а) карама-каршы жактары барабар болсо, анда ал параллелограмм болот;

б) карама-каршы бурчтары барабар болсо, анда ал параллелограмм болот;

в) диагоналдары кесилишкен чекитте тең экиге бөлүнсө, анда ал параллелограмм болот;

г) бир жагына жанаша жаткан бурчтарынын суммасы 180° ка барабар болсо, анда ал параллелограмм болот.

Бул тескери теореманын ар бир учурун өз алдынча далилдөөгө болот.

Көрсөтмө. 36-теореманын а) учурун далилдөөдө үч бурчтуктардын барабардыгынын 3-белгисин; б) учурунда төрт бурчтуктун бурчтарынын суммасы 360° болоорун; в) учурду далилдөөдө үч бурчтуктардын барабардыгынын 1-белгисин; г) учурун далилдөөдө түз сызыктардын параллелдигинин белгисин колдонуу сунуш кылынат.

Жогорудагы теоремалардын негизинде параллелограммдын белгиси катары төмөндөгү теореманы баяндоого болот.

37-теорема. **Эгерде томпок төрт бурчтуктун карама-каршы эки жагы барабар жана параллель болсо, анда ал параллелограмм болот.**

Далилдөө. $ABCD$ томпок төрт бурчтугу берилип, $AB=DC$ $AB\parallel DC$ болсун (104-сүрөт). $AD\parallel BC$ болоорун далилдейбиз. $\angle 1=\angle 2$ ($AB\parallel DC$), $AB=DC$, AC — жалпы жак болгондуктан, ал үч бурчтуктардын барабардыгынын 1-белгиси боюнча $\Delta ABC=\Delta ACD$ болот. Мындан $\angle 4=\angle 3$ экендиги келип чыгат. Демек, $AD\parallel BC$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

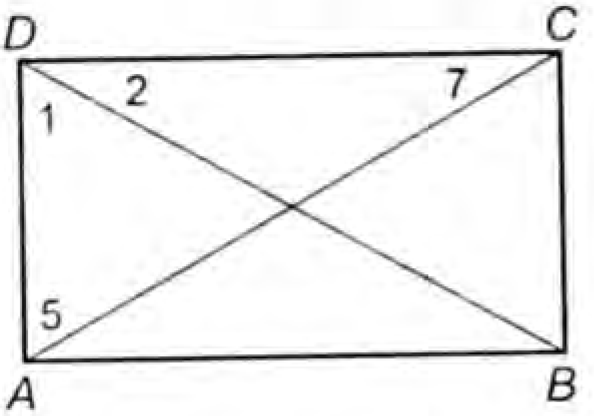
1. $a\parallel b$ түз сызыктары берилген. Аларды тиешелүү түрдө A, B, C, D чекиттеринде кесип өтүүчү $c\parallel d$ эки түз сызыгын сызгыла. Натыйжада A, B, C, D төрт бурчтугу алынат. Ал төрт

бурчтуктун параллелограмм болоорун түшүндүрүп бергиле. Чиймеде сызып көрсөткүлө.

2. Параллелограммдын жактары: 1) 6 см жана 4 см; 2) 11,5 м жана 7 м болсо, анын периметрин эсептегиле.
3. Параллелограммдын бир жагы 12,4 дм. Экинчи жагы ал жагынан: а) 0,8 дм ге кыска; б) 1,6 дм ге узун; в) 4 эсе кичине болсо, параллелограммдын периметрин эсептегиле.
4. Параллелограммдын периметри 18,4 дм. Бир жагы а) 3 дм; б) 7 дм болсо, экинчи жагын тапкыла.
5. Параллелограммдын периметри 24 см. Эгерде бир жагы экинчи жагынан: 1) 4 см ге узун; 2) 6 см ге кыска; 3) 2 эсе узун болсо, параллелограммдын жактарын тапкыла.
6. Эгерде параллелограммдын жактарынын суммасы 12 см, ал эми жактарынын катышы: а) 1:2; б) 3:2 катышына барабар болсо, анда анын жактарын тапкыла.
7. Параллелограммдын бир бурчу 42°. Калган бурчтарын эсептегиле.
8. Параллелограммдын бир бурчу экинчи бурчунан: а) 15° ка чоң; б) 7°30′ ка кичине; в) 2 эсе чоң болсо, анда анын бурчтарын тапкыла.
9. Параллелограммдын диагоналдарынын кесилишкен чекити аркылуу жүргүзүлгөн түз сызыктын параллель жактарынын арасындагы кесиндиси ошол чекитте тең экиге бөлүнөөрүн далилдегиле.
10. а) Эки жагы жана алардын арасындагы бурчу; б) эки жагы жана бир диагоналы; в) эки диагоналы жана бир жагы; г) эки диагоналы жана алардын арасындагы бурчу; д) негизи, бийиктиги жана диагоналы боюнча параллелограммды түзгүлө.
11. Параллелограммдын диагоналы аны барабар эки үч бурчтукка бөлөөрүн далилдегиле.
12. Параллелограммдын бир жагында жаткан чокулары карама-каршы жагынан бирдей алыстыкта болоорун далилдегиле.
13. Параллелограммдын карама-каршы бурчтарынын биссектрисалары параллель болоорун далилдегиле.
14. Параллелограммдын жактары 9 см жана 5 см. Диагоналдары: а) 4 см; б) 7 см; в) 14 см; г) 3 см болушу мүмкүнбү?
15. $ABCD$ параллелограммында A бурчунун биссектрисасы BC жагын E чекитинде кесет. Эгерде AB=12 дм жана AD=17 дм болсо, BE жана EC кесиндилеринин узундуктарын эсептегиле.
16. Параллелограммдын бир бурчунун биссектрисасы жагын 12 см жана 7 см узундуктагы кесиндилерге бөлөт. Параллелограммдын периметрин тапкыла.

17. Параллелограммдын бурчунун биссектрисасы анын жагын кесип өткөндө 32° бурчту түзөт. Параллелограммдын бурчтарын эсептегиле.

22.1. ТИК БУРЧТУК



105-сүрөт.

Аныктама. **Бардык бурчтары тик болгон параллелограмм тик бурчтук деп аталат.**

Тик бурчтук параллелограммдын айрым учуру болгондуктан, параллелограммдын бардык касиеттери жана ал жөнүндөгү теоремалар тик бурчтук үчүн да туура болот.

ABCD тик бурчтугунда бардык жактары ирээти боюнча өз ара перпендикулярдуу болушат (105-сүрөт).

38-теорема. **Тик бурчтуктун диагоналдары барабар.**

Тик бурчтуу үч бурчтуктардын барабардыгынан пайдаланып, бул теореманы оңой эле далилдөөгө болот.

39-теорема. (38-теоремага тескери теорема). **Эгерде параллелограммдын диагоналдары барабар болушса, анда ал тик бурчтук болот.**

Муну тең капталдуу үч бурчтуктун касиетин жана үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасынын 180° боло тургандыгын пайдаланып далилдөөгө болот. Мисалы, *ABCD* параллелограммында (105-сүрөт) $AC=BD$ болсо, анда $AO=OC=OD$ болот. Мындан ΔAOD да $\angle 5=\angle 1$, ΔODC да $\angle 2=\angle 7$ болот. Бирок, ΔACD да $\angle 5+\angle 7+\angle 2+\angle 1=180°$. Анда $\angle 1+\angle 2=90°$. Параллелограммдын касиети боюнча калган бурчтары да тик бурч болот. *ABCD* — тик бурчтук. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Тик бурчтук жалпы параллелограммдан кандай айырмаланат?
2. Параллелограммдын жанаша жаткан бурчтары барабар болсо, ал тик бурчтук болот. Далилдегиле.
3. Тик бурчтуктун жактары а) 8,5 см жана 4,5 см; б) 17 дм жана 8 дм. Ар бир учурдагы тик бурчтуктун периметрин эсептегиле.
4. Тик бурчтуктун бир жагы 15 м. Экинчи жагы ал жагынан: а) 2,5 м ге кыска; б) 3 м ге узун; в) 1,5 эсе чоң болсо, анда тик бурчтуктун периметрин эсептегиле.

5. Тик бурчтуктун периметри 24 м. Эгерде бир жагы экинчи жагынан: а) 3 м ге узун; б) 2 м ге кыска; в) 2 эсе кичине болсо, тик бурчтуктун жактарын тапкыла.
6. Тик бурчтуктун жактарынын: а) суммасы 16 дм, катышы 3:7 ге; б) айырмасы 3 дм, катышы 5:3 кө барабар болсо, анын жактарын тапкыла.
7. Тик бурчтуктун периметри 18 м. Эгерде: а) бир жагын 1,5 м ге чоңойтсок (кичирейтсек); б) эки жагын тең 2 м ге чоңойтсок (кичирейтсек); в) эки жагын тен 2 эсе чоңойтсок (кичирейтсек), анда тик бурчтуктун периметри кандай өзгөрөт?
8. Тик бурчтуктун диагоналы жагы менен 36° бурч түзөт. Диагоналдардын арасындагы бурчтардын кичине жагы тарабындагы бурчун тапкыла.
9. Тик бурчтукта диагоналдарынын арасындагы бурчтардын кичине жактын каршысында жаткан бурчу ал кичине жак менен диагоналдын арасындагы бурчтан 30° ка чоң болсо, кичине жак менен диагоналдын арасындагы бурчту тапкыла.
10. Тик бурчтукта диагоналдары 60° бурч менен кесилишет. Эки диагоналдын жана эки кичине жактын суммасы 3,6 м. Диагоналдын узундугун тапкыла.
11. а) Бир жагы жана диагоналы; б) эки жагы; в) диагоналы жана диагоналдарынын арасындагы бурчу; г) негизи жана анын диагоналы менен түзгөн бурчу боюнча тик бурчтукту түзгүлө.
12. Тик бурчтуктун бир бурчунун биссектрисасы жактарынын бирин 12 см жана 8 см кесиндилерге бөлөт. Тик бурчтуктун жактарын эсептегиле.
13. Тик бурчтукка сырттан сызылган айлананы түзгүлө.
14. Тик бурчтуктун периметри 22 дм. Тик бурчтуктун ичинде жаткан каалагандай чекиттен жактарына чейинки аралыктардын суммасын тапкыла.

22.2. РОМБ

Аныктама. **Бардык жактары барабар болгон параллелограмм ромб[1] деп аталат.**

ABCD ромб болсун (106-сүрөт). Ал параллелограммдын бир түрү болгондуктан, параллелограммдын бардык касиеттери жана ал жөнүндөгү теоремалар ромб үчүн да туура болот. Мында *AB*=*BC*=*CD*=*DA* болоору түшүнүктүү.

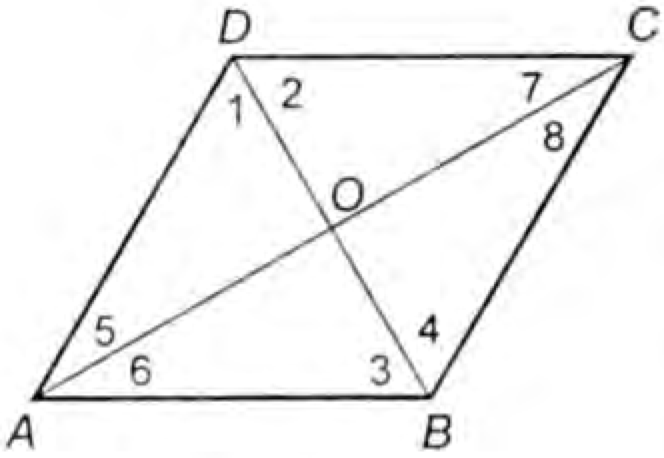
---

[1] Грек сөзү. Параллелограммдын бир түрү дегенди түшүндүрөт.

40-теорема. **Ромбдун диагоналдары өз ара перпендикулярдуу жана алар бурчтарын тең экиге бөлөт.**

Далилдөө. $ABCD$ ромб, AC, BD — диагоналдар (106-сүрөт). $AC\perp BD$, $\angle 1=\angle 2$ болоорун далилдейбиз.

$AO=OC$ (35-теорема, 2-натыйжа). ΔACD — тең капталдуу, анда DO медианасы анын бийиктиги да, биссектрисасы да болот: $DO\perp AC$ же $AC\perp BD$, ошондой эле $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, $\angle 5=\angle 6$, $\angle 7=\angle 8$ боло тургандыгы түшүнүктүү.



106-сүрөт.

41-теорема (40-теоремага тескери теорема). **Эгерде параллелограммдын диагоналдары перпендикулярдуу болушса, анда ал ромб болот.**

Теореманы өз алдынарча далилдегиле.

1. Ромб жалпы параллелограммдан кандай айырмаланат?
2. Ромбдун жагы 6,5 дм. Периметрин эсептегиле.
3. Ромбдун периметри 36,4 м. Жагын тапкыла.
4. Ромбдун бир диагоналы жагына барабар болсо, анын бурчтарын эсептегиле.
5. Ромбдун тар бурчу 42°. Калган бурчтарын тапкыла.
6. Эгерде параллелограммдын:
   а) диагоналдары өз ара перпендикулярдуу болсо;
   б) диагоналы бурчун тең экиге бөлсө, анда ал ромб болоорун далилдегиле.
7. Тик бурчтуктун жактарынын ортолору ромбдун чокулары болоорун далилдегиле.
8. Ромбдун жагы анын диагоналдары менен айырмасы 15° ка барабар бурчтарды түзөт. Ромбдун бурчтарын тапкыла.
9. Ромбдун жагынын диагоналдары менен түзгөн бурчтарынын катышы 2:7 ге барабар. Ромбдун бурчтарын эсептегиле.
10. Эгерде ромбдун кең бурчунун чокусунан жагына түшүрүлгөн бийиктик ал жакты тең экиге бөлсө, ромбдун бурчтарын эсептегиле.
11. Ромбдун периметри 16 дм, ал эми бийиктиги 2 дм. Ромбдун кең бурчун тапкыла.
12. а) Жагы жана диагоналы; б) эки диагоналы; в) бурчу жана диагоналы боюнча ромб түзгүлө.

22.3. КВАДРАТ

Аныктама. **Бардык жактары барабар болгон тик бурчтук квадрат деп аталат.**

Квадрат тик бурчтуктун айрым учуру болгондуктан тик бурчтуктун бардык касиеттери квадрат үчүн да туура болот.

Квадратты бардык бурчтары тик болгон ромб катарында да кароого болот. Ошондуктан квадраттын диагоналдары өз ара барабар жана перпендикулярдуу болушат.

1. Квадрат жалпы ромбдон кандай айырмаланат?
2. Квадрат жалпы тик бурчтуктан кандай айырмаланат?
3. Квадраттын бир жагы 7,5 см ге барабар. Анын периметрин эсептегиле.
4. Квадраттын периметри 3,2 см. Жагын тапкыла.
5. Ромбдун диагоналдары барабар болсо, анда ал квадрат болоорун далилдегиле.
6. а) Жагы; б) диагоналы боюнча квадратты түзгүлө.
7. Эгерде квадраттын жагы: а) 4,5 см ге чоңойсо; б) 3 см ге кичирейсе; в) 3 см ге чоңойсо; г) 2 эсе кичирейсе, анда берилген квадраттын периметри кандай өзгөрөт?
8. Ар бир катети 4 дм болгон тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтукка бир жалпы бурчка ээ болгондой кылып, квадрат ичтен сызылган. Квадраттын периметрин тапкыла.
9. Квадраттын диагоналы 8 дм. Анын жагы экинчи квадраттын диагоналы болуп эсептелет. Экинчи квадраттын жагын тапкыла.
10. Бир бурчу тик болгон ромб квадрат болоорун далилдегиле.
11. Квадрат берилген. Ал квадратка сырттан сызылган жана ичтен сызылган айланаларды түзгүлө. Ар бир учурда айлананын борборун жана радиусун аныктагыла.

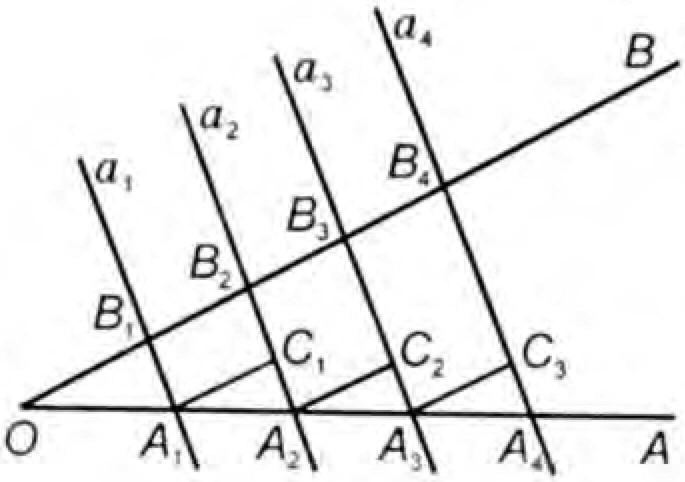
§ 23. ФАЛЕСТИН ТЕОРЕМАСЫ

42-теорема (Фалестин[1] теоремасы). **Бурчтун жактарын кесип өтүүчү параллель түз сызыктар бурчтун бир жагын барабар кесиндилерге кесип өтсө, анда алар бурчтун экинчи жагын да барабар кесиндилерге кесип өтөт.**

Далилдөө. $\angle AOB$ берилсин (107-сүрөт). $a_1 \| a_2 \| a_3 \| a_4$ түз сызыктары бурчтун OA жагын тиешелүү түрдө A_1, A_2, A_3, A_4 чекиттеринде, OB жагын B_1, B_2, B_3, B_4 чекиттеринде кесип өтсүн жана

---

[1] Фалес Милетский — биздин эрага чейинки VI кылымда жашаган байыркы грек окумуштуусу.



107-сүрөт.

$OA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4$ болсун. Анда $OB_1=B_1B_2=B_2B_3=B_3B_4$ боло тургандыгын далилдейбиз.

A_1, A_2, A_3 чекиттери аркылуу OB шооласына параллель болгон A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 кесиндилерин жүргүзөбүз. $\Delta A_1C_1A_2=\Delta A_2C_2A_3$, анткени $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$ — туура келүүчү бурчтар, $A_1A_2=A_2A_3$ (үч бурчтуктардын барабардыгынын 2-белгиси). Мындан $A_1C_1=A_2C_2$ болот. Натыйжада $A_1B_1B_2C_1$, $A_2B_2B_3C_2$ параллелограммдарына ээ болобуз. Анда $A_1C_1=B_1B_2$, $A_2C_2=B_2B_3$ же $B_1B_2=B_2B_3$ болот. Калган кесиндилердин барабардыгы (*OB* шооласындагы) ушуга окшош далилденет. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Фалестин теоремасын пайдаланып, берилген кесиндини тең экиге бөлгүлө.
2. Берилген кесиндини: а) 3; б) 5; в) 7 барабар бөлүктөргө бөлгүлө.
3. Берилген кесиндини катыштары: а) 1:3; б) 2:5 ке барабар болгондой кылып эки кесиндиге бөлгүлө.
4. *AOB* бурчунун *OA* жагына $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=1$ см жана *OB* жагына $OB_1=B_1B_2=B_2B_3=3$ см кесиндилери өлчөнүп коюлган. $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ болоорун далилдегиле.
5. *KOM* бурчунун *OK* жагына $OC=1{,}5$ дм жана $CD=1{,}5$ дм кесиндилери, *OM* жагына $OE=2$ дм кесиндиси өлчөнүп коюлган. Эгерде $CE \parallel DF$ (*F* чекити *OM* жагында жатат) болсо, *OF* кесиндисин тапкыла.
6. Үч бурчтуктун бир жагы 6 барабар бөлүккө бөлүнгөн. Ал үч бурчтуктун калган эки жагын: а) тең экиге; б) 3 барабар бөлүккө кантип бөлүүгө болот?

§ 24. ТРАПЕЦИЯ

Аныктама. **Эки жагы гана параллель болгон томпок төрт бурчтук трапеция[1] деп аталат.**

Трапеция томпок төрт бурчтуктардын бир түрү болгондуктан, анын элементтеринин аныкталышы, белгилениши жалпы томпок төрт бурчтуктарга окшош болот.

---

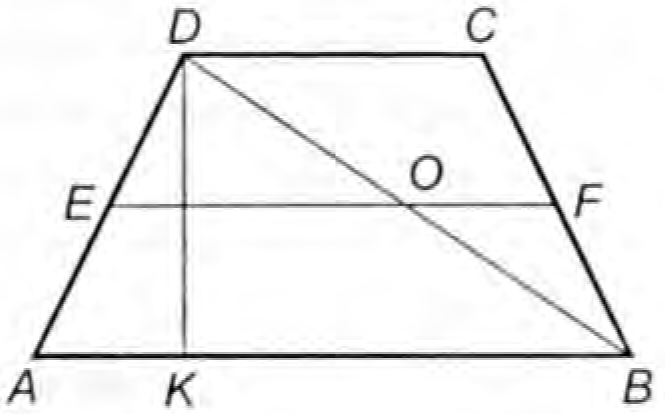
[1] Грек сөзү, «*тактайча*» дегенди түшүндүрөт.

ABCD трапеция болсун (108-сүрөт). Трапециянын параллель жактары негиздери, параллель эмес жактары каптал жактары деп аталышат. $AB \parallel DC$ болгондуктан, *AB*, *DC* — негиздери, *AD*, *BC* — каптал жактары болушат.

Эгерде трапециянын бир бурчу 90° ка барабар болсо, анда ал **тик бурчтуу** трапеция болот. Каптал жактары барабар трапеция **тең капталдуу** трапеция деп аталат.

Трапециянын чокусунан негизине түшүрүлгөн перпендикуляр анын **бийиктиги** деп аталат. $DK \perp AB$, *DK* — кесиндиси *D* чокусунан *AB* негизине түшүрүлгөн бийиктик болот.

Каптал жактарынын тең ортолорун туташтыруучу кесинди трапециянын **орто сызыгы** деп аталат. *EF* — трапециянын орто сызыгы.



108-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Трапециянын параллелограммдан кандай айырмасы бар?
2. *ABCD* трапециясы берилген. *B* чокусунан *CD* каптал жагына жүргүзүлгөн параллель түз сызык *AD* чоң негизин *E* чекитинде кесип өтөт. ΔABE нун периметри 18 дм, ал эми ED=5 дм болсо, берилген трапециянын периметрин тапкыла.
3. Трапециянын каптал жагы 4 барабар бөлүккө бөлүнүп, бөлүү чекиттери аркылуу экинчи каптал жагына чейин, негизине параллель болгон кесиндилер жүргүзүлгөн. Эгерде берилген трапециянын негиздери 12 дм жана 32 дм болсо, параллель кесиндилердин узундуктарын тапкыла.
4. Трапециянын эки бурчу 112° жана 65° ка барабар. Анын калган бурчтарын эсептегиле.
5. Трапециянын диагоналы анын тиешелүү бурчтарынын биссектрисасында жатат. Бул трапециянын эки жагы барабар болоорун далилдегиле. Ал трапецияны тең капталдуу деп айтууга мүмкүнбү?
6. Тең капталдуу трапециянын негизиндеги бурчтары барабар болоорун далилдегиле.
7. Тең капталдуу трапециянын диагоналдары барабар. Далилдегиле.
8. Тең капталдуу трапециянын кичине негизи 8 см, каптал жагы 10 см, ал эми негизиндеги тар бурчу 45° болсо, анда берилген тең капталдуу трапециянын периметрин эсептегиле.

9. Эгерде тең капталдуу трапециянын карама-каршы бурчтарынын айырмасы 56° болсо, трапециянын бурчтарын тапкыла.

10. а) Төрт жагы; б) эки негизи жана эки диагоналы боюнча трапецияны түзгүлө. Маселенин дайыма эле чыгарылышы болобу?

11. Тең капталдуу трапециянын кичине негизи каптал жагына барабар, ал эми диагоналы каптал жагына перпендикуляр. Трапециянын бурчтарын аныктагыла.

12. Тең капталдуу трапециянын диагоналы тар бурчун тең экиге бөлөт. Трапециянын периметри 15 м, ал эми чоң негизи 6 м болсо, кичине негизин тапкыла.

13. Тең капталдуу трапециянын чоң негизи 10,5 дм, каптал жагы 4 дм, ал эми алардын арасындагы бурчу 60° болсо, кичине негизинин узундугун эсептегиле.

14. Тең капталдуу трапециянын кең бурчунун чокусунан түшүрүлгөн бийиктик анын чоң негизин 8 см жана 26 см узундуктагы эки кесиндиге бөлөт. Берилген трапециянын негиздерин эсептегиле.

§ 25. ҮЧ БУРЧТУКТУН, ТРАПЕЦИЯНЫН ОРТО СЫЗЫКТАРЫ

Адегенде үч бурчтуктун орто сызыгы жөнүндөгү түшүнүккө жана анын касиетине токтолобуз.

Аныктама. **Үч бурчтуктун эки жагынын тең ортолорун туташтыруучу кесинди анын орто сызыгы деп аталат.**

Мисалы, ABC үч бурчтугунун (109-сүрөт) AC жагынын тең ортосу D чекити, BC нын ортосу E чекити болсо, анда DE кесиндиси берилген үч бурчтуктун орто сызыгы болот. Ар кандай үч бурчтуктун орто сызыгы дайыма болоору түшүнүктүү.

43-теорема. **Үч бурчтуктун эки жагынын ортолорун туташтыруучу орто сызыгы үчүнчү жагына параллель жана анын жарымына барабар болот.**

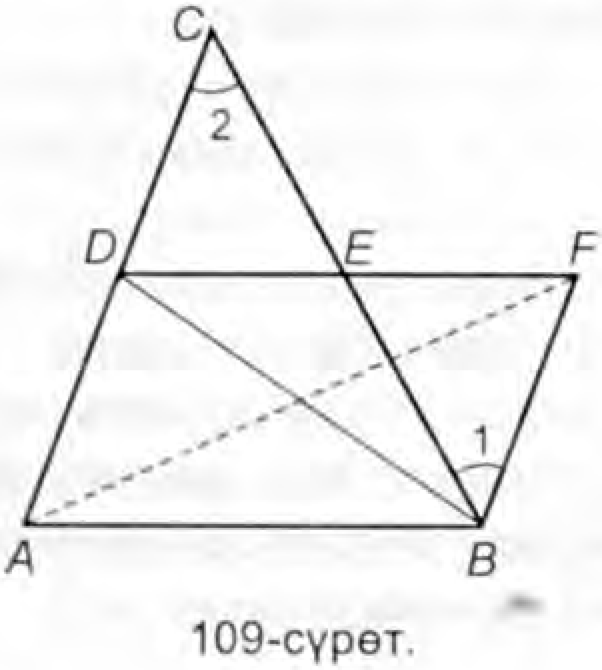
Далилдөө. ABC үч бурчтугу берилсин (109-сүрөт). DE орто сызыгын жүргүзөбүз. Мында $DE \| AB$ жана $DE = \frac{1}{2} AB$ болоорун далилдейбиз. DE шооласына E ден баштап $EF = DE$ кесиндисин өлчөп коебуз. Анда $\Delta DEC = \Delta BEF$ (1-белгиси боюнча) болот. Мындан $DC = BF$ (1) жана $\angle 1 = \angle 2$ (2) боло тургандыгы түшүнүктүү. Натыйжада $AD = DC = BF$ (3) болот. (2) ден $DC \| BF$ же $AD \| BF$ (4) экендиги келип чыгат (параллель түз сызыктардын касиети). Анда (3), (4) дан $ABFD$ төрт бурчтугу параллелограмм болот (37-теорема). Ошентип, $DF \| AB$ жана $DF=AB$ же тиешелүү түрдө $DE \| AB$ жана $DE=\frac{1}{2}AB$ болот, мында $DF=2DE$ экендиги эске алынды. Теорема далилденди.

Үч бурчтуктун чокусун, ал чокунун каршысында жаткан жактын тең ортосу менен туташтыруучу кесинди ал үч бурчтуктун медианасы боло тургандыгы белгилүү. Мисалы, ABC үч бурчтугунун (110-сүрөт) A чокусун BC жагынын тең ортосунда жаткан A_1 чекити менен туташтырсак, AA_1 медианасына ээ болобуз, мында A_1 чекити медиананын негизи деп аталат.

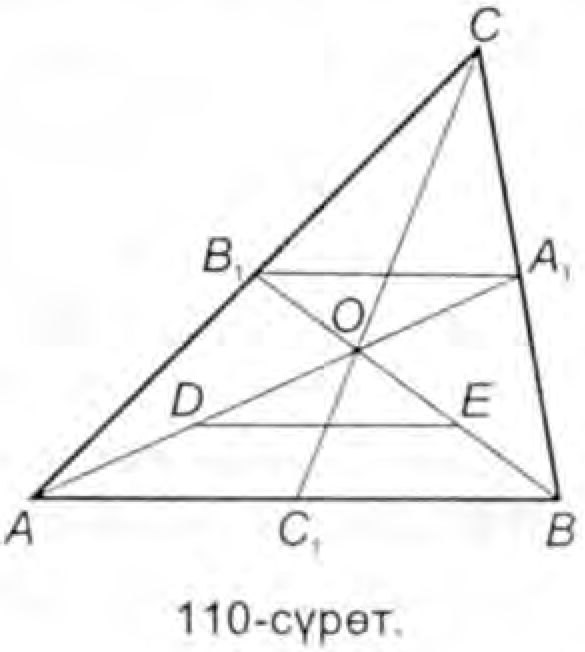
44-теорема. **Үч бурчтуктун үч медианасы бир чекитте кесилишет да, ал чекит ар бир медиананы тиешелүү негизинен баштап эсептегенде $\frac{1}{3}$ бөлүккө бөлөт.**

Далилдөө. ABC үч бурчтугу берилсин (110-сүрөт). AA_1 жана BB_1 медианаларын жүргүзөбүз. Алар O чекитинде кесилишсин. B_1A_1 кесиндиси ABC үч бурчтугунун орто сызыгы болот. Анда 43-теореманын негизинде $B_1A_1 \| AB$ жана $B_1A_1=\frac{AB}{2}$. AO кесиндисинин ортосу D чекити, ал эми BO кесиндисинин ортосу E чекити болсун. Анда DE кесиндиси AOB үч бурчтугунун орто сызыгы болот. Ошол эле, 43-теореманын негизинде $DE \| AB$ жана $DE=\frac{1}{2}AB$ экендигин байкайбыз. Демек, $B_1A_1=DE$ жана $B_1A_1 \| DE$. Мындан, 43-теоремадагыга окшош талкуулап, $\Delta OA_1B_1=\Delta ODE$ экендигине ээ болобуз. Демек, $A_1O=OD$ жана $B_1O=OE$ болот. $OD=DA$, $OE=EB$ экендиги белгилүү. Натыйжада $A_1O=OD=DA$, $B_1O=OE=EB$ экендигин алабыз, б. а. AA_1 жана BB_1 медианаларынын ар бири үч барабар бөлүккө бөлүндү.

Ошентип, AA_1 медианасы BB_1 медианасын негизинен баштап эсептегенде үчтөн бир бөлүккө бөлөт. Ушундай эле талкуулоонун негизинде CC_1 медианасы да BB_1 медианасын $\frac{1}{3}$ бөлүккө бөлөт, б. а. O чекити аркылуу өтөт. Демек, үч бурчтуктун үч



109-сүрөт.



110-сүрөт.

медианасы бир чекитте кесилишет жана ал чекитте ар бир медиана негизинен баштап эсептегенде $\frac{1}{3}$ бөлүккө бөлүнөт, б. а. $OA_1 = \frac{AA_1}{3}$, $OB_1 = \frac{BB_1}{3}$, $OC_1 = \frac{CC_1}{3}$. Теорема далилденди.

Мындан $AO = \frac{2}{3}AA_1$, $BO = \frac{2}{3}BB_1$, $CO = \frac{2}{3}CC_1$ экендиги келип чыгат.

Эскертүү. Үч бурчтуктун медианаларынын кесилишкен чекитин анын оордук борбору деп аташат.

45-теорема. **Трапециянын орто сызыгы негиздерине параллель жана негиздеринин суммасынын жарымына барабар.**

Далилдөө. 108-сүрөттөгү чиймеден пайдаланабыз. $EF \| AB$, $EF \| DC$ жана $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$ болоорун далилдейбиз.

AD жагынын тең ортосу болгон E чекити аркылуу AB жана DC негиздерине параллель болгон түз сызык жүргүзсөк, BC каптал жагын F чекитинде кесип өтөт. Фалестин теоремасы (42-теорема) боюнча $AE = ED$ болгондуктан, $BF = FC$ болот. Анда EF — трапециянын орто сызыгы болот. Жогорудагы түзүү боюнча $EF \| AB$, $EF \| DC$. Демек, теореманын биринчи бөлүгү далилденди.

Фалестин теоремасынын негизинде O чекити да BD кесиндисинин ортосунда жатат. Анда EO жана OF кесиндилери тиешелүү түрдө ABD, BCD үч бурчтуктарынын орто сызыктары болушат: $EO = \frac{1}{2}AB$, $OF = \frac{1}{2}DC$ (43-теорема).

$EF = EO + OF = \frac{1}{2}(AB + CD)$ — теорема толук далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. ΔABC берилген. E — AC жагынын ортосу, F — BC жагынын ортосу. Эгерде: а) $AB = 12$ дм болсо, EF орто сызыгын; б) $EF = 4{,}5$ см болсо, AB жагын тапкыла.
2. Үч бурчтуктун жактары 6 м, 9 м, 13 м. Анын орто сызыктарынан түзүлгөн үч бурчтуктун жактарын тапкыла.
3. Үч бурчтук берилген. Анын орто сызыктарынан түзүлгөн үч бурчтуктун жактары 5 дм, 7 дм, 10 дм. Берилген үч бурчтуктун жактарын аныктагыла.
4. Үч бурчтуктун периметри 24 м. Ал үч бурчтуктун орто сызыктарынан түзүлгөн үч бурчтуктун периметрин эсептегиле.
5. Үч бурчтуктун орто сызыктарынан түзүлгөн үч бурчтуктун периметри 15 дм. Берилген үч бурчтуктун периметрин эсептегиле.
6. Ар кандай томпок төрт бурчтуктун жактарынын ортолору параллелограммдын чокулары болот. Далилдегиле.

7. Үч бурчтуктун жактарынын катышы 4:3:5 катышына барабар. Бардык жактарынын ортолорун туташтыруудан пайда болгон үч бурчтуктун периметри 3,6 дм. Берилген үч бурчтуктун жактарын тапкыла.

8. a түз сызыгынын ар түрдүү жагында болуп, андан 12 дм жана 5 дм аралыкта жаткан A жана B чекиттери берилген. AB кесиндисинин ортосундагы O чекитинен a түз сызыгына чейинки аралыкты тапкыла.

Көрсөтмө. B чекити аркылуу a га параллель түз сызык жүргүзүп, ага A дан жана O дон перпендикуляр түшүрүү керек.

9. Үч бурчтуктун жактарынын ортолору берилсе, ал үч бурчтукту түзгүлө.

10. Үч бурчтуктун чокулары анын орто сызыгы аркылуу өтүүчү түз сызыктан бирдей алыстыкта болушат. Далилдегиле.

11. Үч бурчтуктун орто сызыктары аны төрт барабар үч бурчтуктарга бөлөөрүн далилдегиле.

12. Үч бурчтуктун бир медианасы 6 м ге барабар. Медианалары кесилишкен чекитте бул медиана кандай бөлүктөргө бөлүнөт?

Көрсөтмө. Ар кандай үч бурчтуктун эки медианасы, кесилишкен чекитте, чокуларынан баштап эсептегенде, 2:1 катышында бөлүнө тургандыгынан пайдалангыла.

13. Ромбдун жактарынын ортолору тик бурчтуктун чокулары болоорун далилдегиле.

14. Тик бурчтуктун карама-каршы жактарынын ортолорун туташтыруучу кесиндилер ромбдун диагоналдары болоорун далилдегиле.

15. Трапециянын негиздери 6,4 дм жана 8,6 дм. Орто сызыгын тапкыла.

16. Кесиндинин учтары түз сызыктан 18 дм жана 8 дм аралыкта. Кесиндинин ортосу түз сызыктан кандай аралыкта болот? Эки учурду карагыла.

17. Трапециянын негиздеринин катышы 2:3 кө барабар, орто сызыгы 24 дм. Негиздерин тапкыла.

18. Трапециянын диагоналдарынын ортолорун туташтыруучу кесинди анын негиздерине параллель жана негиздеринин айырмасынын жарымына барабар болоорун далилдегиле.

19. Трапециянын орто сызыгы 10 м болуп, диагоналы аркылуу айырмасы 4 м болгон эки кесиндиге бөлүнөт. Трапециянын негиздерин тапкыла.

20. Эгерде трапециянын диагоналдары анын орто сызыгын үч барабар кесиндилерге бөлсө, анда трапециянын негиздеринин катышын эсептегиле.

21. Тик бурчтуу трапеция диагоналы аркылуу эки үч бурчтукка бөлүнгөн. Алардын бирөө жагы a га барабар болгон тең жактуу үч бурчтук, ал эми экинчиси тик бурчтуу үч бурчтук. Трапециянын орто сызыгын тапкыла.

22. Тең капталдуу трапециянын негизиндеги тар бурчу 45°, бийиктиги h, ал эми орто сызыгы d. Трапециянын негиздерин аныктагыла.

23. Тең капталдуу трапециянын кең бурчунун чокусунан түшүрүлгөн бийиктиги чоң негизин 3,5 дм жана 8,5 дм узундуктагы кесиндилерге бөлөт. Трапециянын орто сызыгын эсептегиле.

24. Трапециянын негиздери 5,6 м жана 2,4 м. Бул трапециянын орто сызыгын диагоналдардын бири кандай кесиндилерге бөлөт?

25. Айлананын диаметринин учтары жанымасынан 3,4 дм жана 1,2 дм аралыкта. Диаметрдин узундугун тапкыла.

26. Бир негизи, бийиктиги жана эки диагоналы боюнча трапецияны түзгүлө. Кайсы учурда чыгарылышы болбойт?

V ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Төрт бурчтукка аныктама бергиле.
2. Томпок жана томпок эмес төрт бурчтуктар кандай айырмаланышат?
3. Төрт бурчтуктун канча диагоналы бар?
4. Төрт бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы канчага барабар?
5. Параллелограммга аныктама бергиле.
6. Параллелограммдын кандай касиеттерин билесиңер?
7. Томпок төрт бурчтуктун параллелограмм боло турган белгилерин атагыла, канча белгиси бар?
8. Фалестин теоремасы кандай баяндалат?
9. Ромбду параллелограммдан айырмалап туруучу кандай касиеттерин билесиңер?
10. Тик бурчтукту параллелограммдан айырмалап туруучу кандай касиеттери бар?
11. Квадрат тик бурчтук (ромб) боло алабы?
12. Үч бурчтуктун орто сызыгын аныктагыла.
13. Үч бурчтуктун орто сызыгы жөнүндөгү теореманы баяндагыла.
14. Үч бурчтуктун медианаларынын кандай касиеттери бар?
15. Трапециянын кандай түрлөрүн билесиңер?
16. Трапециянын орто сызыгы эмнеге барабар? Анын кандай касиети бар?

V ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. Томпок төрт бурчтуктун бир бурчу α. Анын каршысындагы бурчу 9 эсе чоң, ал эми калган бурчтары андан 3; 7 эсе чоң. Томпок төрт бурчтуктун бурчтарын тапкыла.

2. Эгерде томпок төрт бурчтуктун бардык бурчтары барабар болсо, анда ал тик бурчтук болоорун далилдегиле.

3. Параллелограммдын бир бурчуна биссектриса жүргүзүлгөн. Эгерде параллелограммдын жактары 5 см жана 6 см болсо, ал биссектриса параллелограммдын чоң жагын кандай кесиндилерге бөлөт?

4. Эгерде ромбдун диагоналдарынын бири жагына барабар болсо, анын бурчтарын тапкыла.

5. Трапециянын диагоналдарынын ортолору жана каптал жактарынын ортолору бир түз сызыкта жатаарын далилдегиле.

6. Трапециянын негиздери a жана b берилген. Анын диагоналдарынын ортолорун туташтыруучу кесиндинин узундугун тапкыла.

7. Трапециянын каптал жагы үч барабар бөлүккө бөлүнгөн. Бөлүү чекиттеринен негиздерине параллель кесиндилер жүргүзүлгөн. Эгерде трапециянын негиздери 4 дм жана 10 дм болсо, ал кесиндилердин узундуктарын тапкыла.

Көрсөтмө. Бөлүү чекиттери аркылуу экинчи каптал жагына параллель кесиндилер жүргүзгүлө.

8. Параллелограммдын эки бурчунун айырмасы 110° болсо, анын бардык бурчтарын тапкыла.

9. Трапециянын орто сызыгы 7 см, негиздеринин бири экинчисинен 4 см ге чоң. Негиздерин тапкыла.

10. Тең капталдуу трапецияда: а) диагоналдары; б) негизиндеги бурчтары барабар болоорун далилдегиле.

VI глава ТИК БУРЧТУУ ҮЧ БУРЧТУКТУН ЖАКТАРЫ МЕНЕН БУРЧТАРЫНЫН АРАСЫНДАГЫ БАЙЛАНЫШТАР

§ 26. ТИК БУРЧТУУ ҮЧ БУРЧТУКТУН ЖАКТАРЫНЫН КАТЫШЫ

Тик бурчтуу үч бурчтуктун жактары менен бурчтарынын арасындагы байланыштар геометриялык көп суроолорду окупүйрөнүүдө маанилүү ролду ойнойт.

ABC тик бурчтуу үч бурчтугу берилсин (111-сүрөт). Анын катеттерин a, b гипотенузасын c, бир тар бурчун, мисалы A бурчун, α (альфа) аркылуу белгилейли. $\angle C=90^\circ$ болсун. Бул үч бурчтуктун жактарынын катышын карайбыз. Адегенде α тар бурчунун косинусу[1] деген түшүнүккө көңүл буруп көрөлү.

Аныктама. **Тик бурчтуу үч бурчтуктун α тар бурчуна жанаша жаткан катеттин гипотенузага болгон катышы ал бурчтун косинусу деп аталат.** Ал кыскача

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \tag{1}$$

түрүндө жазылат.

Бул катыштын маанилүү бир өзгөчөлүгүн белгилей кетели. (1) катыш α бурчунун чоңдугунан гана көз каранды болот, ал тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарынын узундуктарынан көз каранды эмес. Демек, берилген тар бурчтун косинусу бир гана мааниге ээ болот.

46-теорема. **Берилген бурчтун косинусу ал бурчтун чоңдугунан гана көз каранды болот.**

Далилдөө. *ABC* тик бурчтуу үч бурчтугу берилсин, ага карата (1) барабардык аткарылат деп эсептейли.

AB шооласына $AD=k\cdot c$ кесиндисин (112-сүрөт), ал эми *AC* шооласына $AE=k\cdot b$ кесиндисин (k — оң сан) өлчөп коебуз. Мында ΔADE тик бурчтуу үч бурчтук жана $\cos\alpha=\frac{AE}{AD}$ болоорун далилдейбиз.

---

[1] Латын сөзү, *«синусту толуктагыч»* же *«синус менен бирге»* деген мааниде. Кыскача *«cos»* түрүндө белгиленет.

Чындыгында эле, $DE \perp AE$ болот. Тескерисинче, DE кесиндиси AE түз сызыгына перпендикуляр эмес деп эсептейли. Анда D чекитинен AE түз сызыгына DF перпендикулярын түшүрүүгө болот. Натыйжада ADF тик бурчтуу үч бурчтугу үчүн $\cos\alpha = \frac{AF}{AD}$ катышын жаза алабыз. Ал эми (1) барабардыктын негизинде $\frac{b}{c} = \frac{AF}{AD}$ болот.

Бирок, $\frac{AE}{AD} = \frac{k \cdot b}{k \cdot c} = \frac{b}{c}$ же $\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AD}$ болуп калат. Акыркы барабардыктан $AE{=}AF$ экендиги келип чыгат, б. а. E жана F чекиттери дал келишет да, $DE \perp AE$ жана $\cos\alpha = \frac{AE}{AD}$ болот. Теорема далилденди.

Ошентип, (1) катышты каалагандай тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчунун косинусу үчүн жазууга болот.

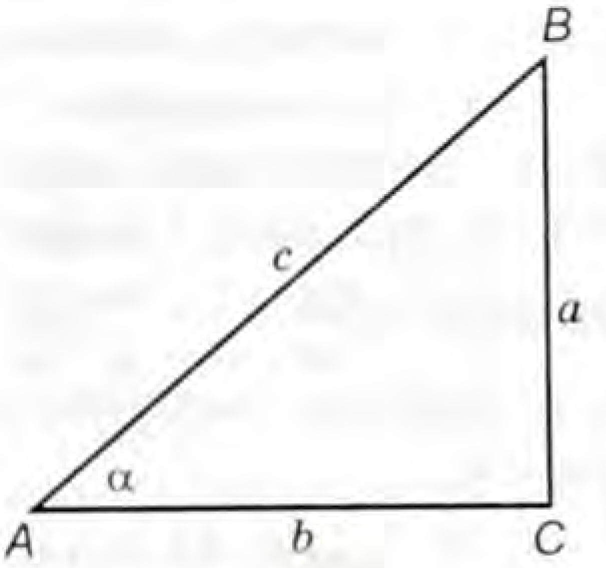
Тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарынын дагы төмөндөгүдөй эки катышын аныктоого болот.

Аныктама. **Тик бурчтуу үч бурчтуктун α тар бурчунун каршысында жаткан катеттин гипотенузуга болгон катышы ал бурчтун синусу[1] деп аталат.** Ал

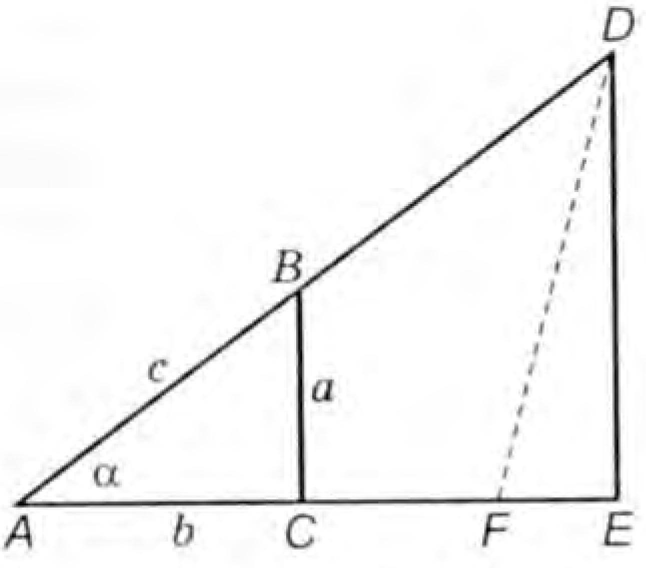
$$\sin a = \frac{a}{c} \qquad (2)$$

түрүндө жазылат.

Аныктама. **Тик бурчтуу үч бурчтуктун a тар бурчунун каршысындагы катеттин жанаша жаткан катетке болгон катышы ал бурчтун тангенси[2] деп аталат.** Аны



111-сүрөт.



112-сүрөт.

---

[1] Латын сөзү, *«ийрилик, ийүү»* деген маанини аныктайт. Кыскача *«sin»* түрүндө белгиленип жазылат.

[2] Латын сөзү, *«жанышуучу»* деген маанини аныктайт. Кыскача *«tg»* түрүндө белгиленип жазылат.

$$tg\alpha = \frac{a}{b} \qquad (3)$$

түрүндө жазабыз.

α тар бурчунун косинусу сыяктуу эле, α бурчунун синусу да, тангенси да ал бурчтун чондугунан гана көз каранды болот. Демек, ар бир α тар бурчуна $\sin\alpha$ нын, $\cos\alpha$ нын, $tg\alpha$ нын бирден гана маанилери туура келет.

Кээде α бурчунун котангенсин (латын сөзү, тангенсти толуктоочу дегенди түшүндүрөт) аныктоочу катышты да колдонушат.

$$ctg\alpha = \frac{b}{a} \qquad (4)$$

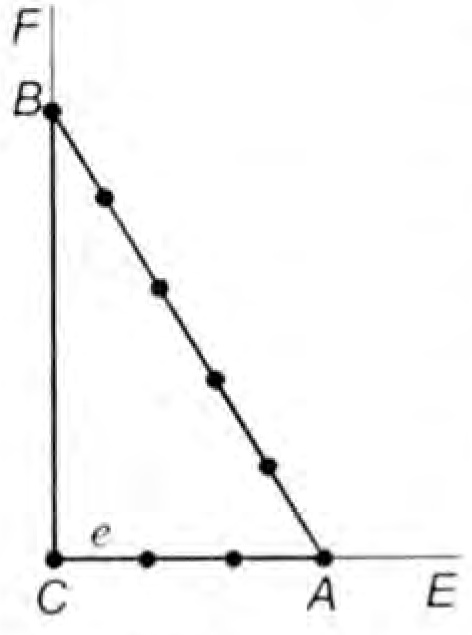
Котангенсти кыскача «ctg» түрүндө жазышат.

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ жана $ctg\alpha$ ларды жалпысынан тар бурчтун тригонометриялык функциялары дейбиз.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Тар бурчунун косинусу 3:5 ке барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтукту түзгүлө.

Чыгаруу. Изделүүчү тик бурчтуу үч бурчтук ABC болсун: $AB=c$ — гипотенузасы, $\angle C=90°$, $\angle A=\alpha$, $BC=a$, $CA=b$ — катеттери. Мында $\cos\alpha=\frac{CA}{AB}=\frac{b}{c}=\frac{3}{5}$ болушу талап кылынат. e бирдик кесиндисин тандап алабыз. $CE\perp CF$ (113-сүрөт) шоолаларын жүргүзөбүз. CE шооласына $CA=3e$ кесиндисин өлчөп коебуз. A чекитин борбор, $AB=5e$ кесиндисин радиус кылып алып айлана сызсак, ал CF шооласын B чекитинде кесип өтөт. Натыйжада ABC тик бурчтуу үч бурчтугу түзүлөт. Ал тик бурчтуу үч бурчтукта $\cos\alpha=\frac{CA}{AB}=\frac{3e}{5e}=\frac{3}{5}$ болот. Демек, түзүлгөн үч бурчтук маселенин шартын канааттандырат.



113-сүрөт.

2. Тар бурчунун косинусу: 1) $\frac{3}{4}$ кө; 2) $\frac{5}{8}$ ке; 3) 0,7ге; 4) 0,5ке барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтукту түзгүлө.

3. Тар бурчунун синусу: 1) $\frac{1}{2}$ ге; 2) 2 : 5ке; 3) 0,6га барабар. Ар бир учурга туура келүүчү тик бурчтуу үч бурчтукту түзгүлө.

4. Тар бурчунун тангенси: 1) $\frac{2}{3}$ ге; 2) $\frac{5}{3}$ ке; 3) 1ге барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтукту түзгүлө.

5. Тар бурчунун котангенси: 1) $\frac{1}{2}$ ге; 2) 1,5 ке; 3) 0,8 ге барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтукту түзгүлө.

6. Тар бурчунун косинусу $\frac{2}{3}$ ге, ал эми ошол бурчтун чокусунан жүргүзүлгөн биссектрисасы m ге барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтук түзгүлө.

7. Эгерде тең капталдуу үч бурчтуктун каптал жагы 5 дм, негизи 6 дм, ал эми бийиктиги 4 дм болсо, негизиндеги бурчунун: а) косинусун; б) синусун; в) тангенсин; г) котангенсин тапкыла.

8. 7-маселеде берилген тең капталдуу үч бурчтуктун чокусундагы бурчунун жарымынын: а) косинусун; б) синусун; в) тангенсин; г) котангенсин эсептегиле.

§ 27. ПИФАГОРДУН ТЕОРЕМАСЫ

Пифагор[1] тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарынын арасындагы байланышты туюндуруучу өтө маанилүү теореманы ачкан.

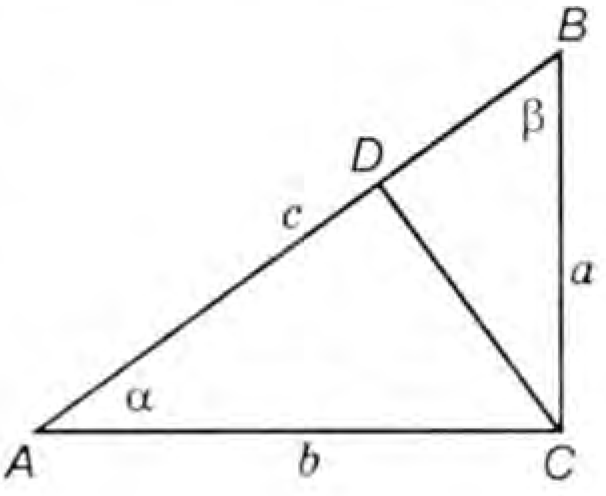
47-теорема (Пифагордун теоремасы). **Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасынын квадраты катеттеринин квадраттарынын суммасына барабар.**

Далилдөө. ABC тик бурчтуу үч бурчтугу берилсин (114-сүрөт). Жогорудагы белгилөөлөрдү пайдаланабыз да,

$$c^2=a^2+b^2 \qquad (5)$$

боло тургандыгын далилдейбиз.

Берилген үч бурчтуктун C тик бурчунун чокусунан AB гипотенузасына CD перпендикулярын түшүрсөк, эки тик бурчтуу үч бурчтук пайда болот: ΔACD жана ΔBCD.



114-сүрөт.

ABC жана ACD тик бурчтуу үч бурчтуктарынан α тар бурчунун косинусун жазабыз (46-теорема):

$$\cos\alpha=\frac{b}{c} \text{ жана } \cos\alpha=\frac{AD}{b}.$$

Натыйжада $\frac{b}{c}=\frac{AD}{b}$ болот. Мындан

---

[1] Байыркы грек математиги, б.э.ч.580—500-жж.

$$b^2=c\cdot A\,D \qquad (x)$$

болот.

Эми ABC жана BCD тик бурчтуу үч бурчтуктарынан β (бета) тар бурчунун косинустарын жазабыз (46-теорема):

$$\cos\beta=\frac{a}{c} \text{ жана } \cos\beta=\frac{DB}{a}$$

Натыйжада $\frac{a}{c}=\frac{DB}{a}$ болот. Жогорудагыдай эле

$$a^2=c\cdot DB \qquad (y)$$

болот.

(x) жана (y) барабардыктарын мүчөлөп кошуп, $AD+DB=$ $=AB=c$ экендигин эске алсак,

$$c^2=a^2+b^2 \qquad (5)$$

келип чыгат. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери: а) 4 см жана 3 см; б) 0,8 м жана 0,6 м; в) 6 дм жана 9,1 дм болсо, гипотенузасын тапкыла.
2. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы 5 м, ал эми бир катети 3 м. Анын экинчи катетин эсептегиле.
3. Тик бурчтуктун жактары 8 дм жана 6 дм. Диагоналын тапкыла.
4. Тик бурчтуктун бир жагы 91 см, диагоналы 109 см болсо, анын экинчи жагын эсептегиле.
5. Квадраттын: а) жагы a берилген, диагоналын; б) диагоналы d берилген, жагын тапкыла.
6. Ромбдун диагоналдары: а) 6 м жана 8 м; б) 12 см жана 16 см; в) 1 дм жана 2,4 дм. Жактарын эсептегиле.
7. Ромбдун жагы 13 дм, ал эми диагоналдарынын бири 10 дм. Экинчи диагоналын тапкыла.
8. ABC — тик бурчтуу үч бурчтук, $\angle C=90°$, a, b — катеттер, c — гипотенуза, a_1, b_1 — тиешелүү катеттердин гипотенузага түшүрүлгөн проекциялары. а) $a=\sqrt{a_1c}$; б) $b=\sqrt{b_1c}$ формулалары туура болоорун далилдегиле.
   Көрсөтмө. § 27, (x), (y) барабардыктарынан пайдалангыла.
9. 8-маселеде: а) $a=8$ см; $a_1=6{,}4$ см болсо, b, c, b_1 ди; б) $b=6$ дм; $b_1=3{,}6$ дм болсо, a , c, a_1 ди; в) $a_1=4{,}2$ м, $b_1=5{,}8$ м болсо, a , b, c ны тапкыла.
10. p жана q кесиндилери берилген. $z=\sqrt{pq}$ кесиндисин түзгүлө.

Көрсөтмө. 8-маселеде чыгарылган формулалардан пайдалангыла.

11. а) Катеттери; б) катети жана гипотенузасы боюнча тик бурчтуу үч бурчтукту түзгүлө.

12. Тик бурчтуктун жактары a жана b берилген. Ага сырттан сызылган айлананы түзгүлө жана анын радиусун тапкыла.

13. Тик бурчтуктун жактарынын катышы 4:3 кө барабар. Ага сырттан сызылган айлананын радиусу 10 см болсо, тик бурчтуктун жактарын тапкыла.

14. Тең капталдуу үч бурчтуктун каптал жагы 13 м, негизи 10 м. Бийиктигин эсептегиле.

15. Тең жактуу үч бурчтуктун: а) a жагы берилген, m медианасын; б) m медианасы берилген, жагын тапкыла.

16. Тең капталдуу трапециянын негиздери 11 дм жана 23 дм, каптал жагы 10 дм. Трапециянын бийиктигин эсептегиле.

17. Тең капталдуу трапециянын негиздери a жана b, каптал жагы c. Диагоналын тапкыла.

§ 28. НЕГИЗГИ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ТЕҢДЕШТИКТЕР

α тар бурчунун ар бир мааниси боюнча $\sin\alpha$ нын, $\cos\alpha$ нын, $\mathrm{tg}\alpha$ нын тиешелүү маанилерин аныктоого болот. Ошондуктан аларды жогоруда тригонометриялык[1] функциялар деп атадык.

Биз төмөндө бир эле α тар бурчунун тригонометриялык функцияларынын байланышын туюндуруучу теңдештиктерди далилдейбиз.

1. *ABC* тик бурчтуу үч бурчтугу берилсин. Пифагордун теоремасын жазабыз:

$$a^2+b^2=c^2 \tag{1}$$

§ 26, (1) жана (2) формулалардан

$$b=c\cdot\cos\alpha, \quad a=c\cdot\sin\alpha$$

болоору белгилүү.

Бул маанилерди (5) ке койсок,

$$(c\cdot\sin\alpha)^2+(c\cdot\cos\alpha)^2=c^2,$$

же

$$\sin\alpha^2+\cos\alpha^2=1 \tag{2}$$

келип чыгат. Бул α бурчунун синусу менен косинусунун арасындагы байланышты берүүчү теңдештик.

---

[1] Грек сөзү, «*үч бурчту+өлчөө*» деген эки сөздүн бириккүсүн мүнөздөйт.

2. Берилген тик бурчтуу үч бурчтук үчүн

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b} \tag{3}$$

болоору белгилүү. Бул барабардыкка 1-учурдагы a менен b нын маанилерин койсок,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{4}$$

келип чыгат. Бул да каалагандай α тар бурчу үчүн теңдештик болуп эсептелет.

3. (6) теңдештиктин ар бир мүчөсүн адегенде $\cos^2\alpha$ га, экинчи жолу $\sin^2\alpha$ га бөлүп, натыйжада төмөндөгүдөй эки теңдештикти алууга болот:

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \tag{5}$$

$$1 + \frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \tag{6}$$

4. ABC тик бурчтуу үч бурчтугунда $\alpha+\beta=90°$ боло тургандыгы белгилүү. Мындан $\beta=90°-\alpha$ болот. § 26, (2) формулада $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, ал эми § 27 да $\cos\beta=\frac{a}{c}$ же $\cos(90°-\alpha)=\frac{a}{c}$ экендиги белгилүү. Натыйжада

$$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha \tag{7}$$

теңдештигине ээ болобуз (α тар бурчу үчүн).

Ушундай эле жол менен

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha \tag{8}$$

теңдештигин алууга болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Негизги тригонометриялык теңдештиктерди пайдаланып төмөнкү туюнтмаларды жөнөкөйлөнткүлө:

   а) $2+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$; б) $\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^3\alpha$;

   в) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$; г) $\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\sin\alpha$.

2. Туюнтманы жөнөкөйлөнкүлө.

   а) $(1+tg^2\alpha)\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cos^4\alpha}+\sin\alpha$; б) $(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)\cdot\sin^2\alpha+1$;

   в) $(tg\alpha\cdot ctg\alpha-\cos^2\alpha)\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}$; г) $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha+\sin\alpha$.

3. Ар кандай α тар бурчу үчүн теңдештикти далилдегиле:
а) $(2\mathrm{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha)\sin\alpha + 3\sin\alpha = 5\sin\alpha$;
б) $(1+tg^2\alpha)(1+ctg^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = \frac{1}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$.

4. α жана β тар бурчтары үчүн теңдештикти далилдегиле:

$$(1+tg^2\alpha)^2 - \frac{1}{\cos^4\alpha} + 3\cos^2\beta + 2\sin^2\beta = 2 + \cos^2\beta.$$

5. α тар бурчу үчүн:
а) $\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$; б) $\mathrm{ctg}(90°-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$ болоорун далилдегиле. *Көрсөтмө.* $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$ теңдештиктеринен пайдалангыла.

6. Эгерде α тар бурчу үчүн: 1)$\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\cos\alpha = \frac{60}{61}$; 3) $\cos\alpha=0,8$ болсо, $\sin\alpha$ ны, $\mathrm{tg}\alpha$ ны, $\mathrm{ctg}\alpha$ ны тапкыла.

7. Эгерде α тар бурчу үчүн: 1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$; 3) $\sin\alpha=0,6$ болсо, $\sin\alpha$ ны, $\mathrm{tg}\alpha$ ны, $\mathrm{ctg}\alpha$ ны тапкыла.

§ 29. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН АЙРЫМ МААНИЛЕРИН ЭСЕПТӨӨ

Таблицаларды же эсептөөчү жөнөкөй аспаптарды колдонбой туруп эле тар бурчтун синусун, косинусун жана тангенсин эсептөөгө да болот. Биз төмөндө ошондой эсептөөлөрдүн айрым учурларын көрсөтөбүз. Ал үчүн бурчтун синусунун, косинусунун, тангенсинин аныктамаларын, геометриянын белгилүү теоремаларын жана §28 гы айрым теңдештиктерди пайдаланабыз.

1. *ABC* тик бурчтуу үч бурчтугу берилип, $\alpha=30°$ болсун деп, $\sin30°$, $\cos30°$, $\mathrm{tg}30°$ маанилерин эсептейбиз.

Тик бурчтуу үч бурчтукта 30° бурчтун каршысында жаткан катет гипотенузанын жарымына барабар боло тургандыгы белгилүү. Анда $a=\frac{c}{2}$ болот. Бирок, § 26, (2) формуладагы $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ экендигин пайдалансак, анда $\sin30°=\frac{1}{2}$ болот.

Пифагордун теоремасын пайдалансак, $a^2+b^2=c^2$ (5) болоору белгилүү. $\alpha=30°$ болгондо, (5) формуладан $(\frac{c}{2})^2+b^2=c^2$ же $(\frac{b}{c})^2=\frac{3}{4}$, мындан $\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ болот.

Демек, $\cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ болот. Эми tg=30° маанисин эсептөө оңой. § 28 та (7) теңдештикти пайдалансак, $\mathrm{tg}30° = \frac{\sin30°}{\cos30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\mathrm{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ болот.

2. ABC тик бурчтуу үч бурчтугунда $\alpha=60°$ болсун. sin60°, cos60°, tg60° маанилерин эсептейбиз.

Ал үчүн § 28 гы (10), (11) теңдештиктерди жана 1-учурда табылган маанилерди пайдаланабыз.

$$\sin 60°=\sin(90°-30°)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ушуга окшош эсептесек, $\cos 60°=\frac{1}{2}$ болот. Анда $\mathrm{tg}60°=$ $=\frac{\sin 60°}{\cos 60°}=\sqrt{3}$ же $\mathrm{tg}60°=\sqrt{3}$ болот.

3. ABC тик бурчтуу үч бурчтугунда $\alpha=45°$ болгон учурду карайлы. sin45°, cos45°, tg45° маанилерин эсептөөгө токтолобуз. Мында $a=b$ боло тургандыгы түшүнүктүү. Пифагордун теоремасын колдонсок, $a^2+b^2=c^2$ же $\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ болот. Анда $\sin 45°=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ маанисине ээ болобуз. Анда $\mathrm{tg}45°=1$ болот.

Жогорудагыдай талкуулоолорду жүргүзүп, sin0°, cos0°, tg0°, sin90°, cos90° маанилерин өз алдынча эсептегиле. Эмне үчүн tg90° мааниге ээ болбойт? Түшүндүрүп бергиле.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Белгилүү математикалык таблицаны жана микрокалькуляторду пайдаланбай туруп, тик бурчтуу үч бурчтуктун α тар бурчу 0° болгондо $\sin 0°=0$, $\cos 0°=1$, $\mathrm{tg}0°=0$ болоорун далилдегиле.
2. $\sin 90°=1$ жана $\cos 90°=0$ боло тургандыгын кантип түшүндүрүүгө болот?
3. Тик бурчтуу үч бурчтуктун 60° бурчунун косинусун, синусун, тангенсин жана котангенсин эки түрдүү жол менен эсептегиле: 1) жактарынын байланышынан пайдалангыла; 2) 30° бурчунун белгилүү маанилеринен пайдаланып, (90°–30°) айырмасынын маанилерин синусун, косинусун, тангенсин жана котангенсин аныктоочу теңдештиктерди колдонгула.
4. Тик бурчтуу үч бурчтуктун касиетинен пайдаланып, 45° бурчунун косинусун, синусун, тангенсин жана котангенсин эсептегиле.
5. Эгерде: а) $\alpha=30°$; б) $\alpha=60°$ болсо, $(1-\cos^2\alpha)\sin^2\alpha-\sin^4\alpha+\sin\alpha$ туюнтмасынын маанисин тапкыла.
6. Эгерде $\alpha=45°$ болсо, $\frac{(tg^2\alpha+1)\cdot\cos^2\alpha}{1+tg\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ туюнмасынын маанисин эсептегиле.

7. Туюнтманын маанисин тапкыла:

а) $\operatorname{tg}30° \cdot \cos 30° \cdot \sin 30° \cdot \operatorname{tg}45° \cdot \operatorname{tg}60°$;

б) $\cos^2 30° + \sin^2 30° - \cos^2 60° - \sin^2 60° + \cos^2 45° + \sin^2 45°$.

§ 30. ТИК БУРЧТУУ ҮЧ БУРЧТУКТАРДЫ ЧЫГАРУУ

30.1. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН МААНИЛЕРИН ТАБЛИЦАНЫ КОЛДОНУП ЭСЕПТӨӨ

Жогоруда 30°, 45°, 60° бурчтарынын тригонометриялык функцияларынын маанилерин так эсептеп алуу мүмкүн экендигин көрдүк.

Бирок, бардык эле тар бурчтардын тригонометриялык функцияларынын маанилерин андай жол менен эсептеп чыгарууга мүмкүн эмес. Ошондуктан айрым учурларда таблицаларды да пайдаланышат.

Мисалы, В. М. Брадистин «Төрт орундуу математикалык таблицаларында» тар бурчтун тригонометриялык функцияларынын маанилери берилген. $\sin 38°30'$маанисин таблицадан табуу үчүн синустар таблицасынын сол жагындагы «градустар» мамычасынан 38 санын, ал эми жогору жагындагы «минуталардын» сабынан 30 санын табабыз. Алардын кесилишинде 0,6225 саны жазылган. Демек, $\sin 38°30'=0,6225$ болот. Калган тригонометриялык функциялардын маанилери да ушуга окшош табылат. Айрым учурларда минуталарга карата түзөтүүлөрдү колдонууга туура келет. Ал түшүнүктөр таблицада баяндалган.

Айрым учурда $\operatorname{tg}\alpha=0,4663$ мааниси боюнча α бурчун табуу талап кылынат. Тангенстер таблицасынан 0,4663 санын издейбиз. Ал сандын сол жагындагы мамычадан 25 саны табылат. Демек, $\alpha=25°$ болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Төрт орундуу математикалык таблицаларды колдонуп, төмөндөгү бурчтардын синустарынын жана косинустарынын маанилерин тапкыла: 1) 35°; 2) 18°36′; 3) 40°56′; 4) 75°; 5) 85°12′.
2. Төрт орундуу математикалык таблицаларды колдонуп, төмөндөгү бурчтардын тангенстеринин жана котангенстеринин маанилерин тапкыла: 1) 20°30′; 2) 35°; 3) 40°15′; 4) 58°; 5) 80°45′.

3. $\alpha=30°; 45°; 60°$ болгондо табылган тригонометриялык функциялардын жогорудагы маанилерин (§ 29) алардын таблицалык маанилери менен салыштыргыла.

4. а) $\sin 37°$ жана $\cos 53°$; б) $\text{tg}48°36'$ жана $\text{ctg}41°24'$ маанилерин салыштырып көргүлө. Өзгөчөлүгүн көрсөткүлө.

5. Таблицаны колдонуп: а) $\sin 40°$ жана $\sin 70°$; б) $\cos 20°$ жана $\cos 60°$; в) $\text{tg}30°$ жана $\text{tg}45°$ маанилеринин кайсынысы чоң экендигин аныктагыла. Кандай корутунду жасоого болот?

6. Таблицаны пайдаланып α тар бурчунун маанисин тапкыла:
а) $\sin\alpha=0,9397$; б) $\sin\alpha=0,4163$; в) $\cos\alpha=0,9613$;
г) $\cos\alpha=0,3333$; д) $\text{tg}\alpha=0,1763$; е) $\text{tg}\alpha=1,213$.

30.2. МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРДУ КОЛДОНУП ЭСЕПТӨӨ

Тар бурчтун тригонометриялык функцияларынын маанилерин эсептөөдө, тик бурчтуу үч бурчтуктарды чыгарууда микрокалькуляторду да колдонуу ыңгайлуу. Ал эсептөөнү кыйла жеңилдетет. Микрокалькуляторлорду эсептөөлөрдө кандай колдонуу керек экендиги атайын методикалык колдонмолордо толук баяндалган.

Төмөндөгү маселелерди чыгарууда микрокалькуляторду колдонуу сунуш кылынат.

1. Маанилерин эсептегиле: 1) $\sin 15°$; 2) $\sin 30°$; 3) $\sin 40°30'$; 4) $\sin 60,8°$; 5) $\sin 75,25°$.

2. Маанилерин тапкыла: 1) $\cos 22°$; 2) $\cos 37°$; 3) $\cos 47°30'$; 4) $\cos 67,5°$; 5) $\cos 80,16°$.

3. Гипотенузасы c, тар бурчу α болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун a жана b катеттери $a=c\cdot\sin\alpha$ жана $b=c\cdot\cos\alpha$ формулалары аркылуу аныкталаары белгилүү. Эгерде: а) $c=7$; $\alpha=48°$; б) $c=41,5$; $\alpha=61,5°$; в) $c=10,74$; $\alpha=11°45'$ болсо, анда анын ар бир катетин тапкыла.

30.3. ТИК БУРЧТУУ ҮЧ БУРЧТУКТАРДЫ ЧЫГАРУУ

Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчунун тригонометриялык функцияларынын аныкталышы, алардын арасындагы теңдештиктер, Пифагордун теоремасы үч бурчтуктарды чыгарууну кыйла жеңилдетет. Атап айтканда, тик бурчтуу үч бурчтуктун эки элементи берилген учурда, анын калган элементтерин оңой аныктоого болот. Мында төрт учур болушу мүмкүн.

1. a жана b катеттери берилген. c гипотенузасын, α, β тар бурчтарын табуу талап кылынат. Аларды $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\beta=90°-\alpha$ формулаларын пайдаланып эсептөөгө болот.

2. c гипотенузасы, a катети берилген. Белгисиз элементтери $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\beta=90°-\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$ формулалары аркылуу табылат.

3. a катети жана α тар бурчу берилген. Белгисиз элементтер төмөндөгү формулалар менен эсептелет: $c=\frac{a}{\sin\alpha}$, $\beta=90°-\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$

4. c гипотенузасы жана α тар бурчу берилген. Калган элементтерин төмөндөгү формулалар аркылуу эсептөөгө болот: $a=c\cdot\sin\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$, $\beta=90°-\alpha$.

Төмөндө тик бурчтуу үч бурчтуктардын берилген эки элементи боюнча калган элементтерин табууга карата маселелер сунуш кылынган.

1. a жана b катеттери берилген: а) a=8, b=6; б) a=30, b=40; в) a=4,35, b=1,45; г) a=12,3, b=61,5. Гипотенузасын жана тар бурчтарын тапкыла.

2. c гипотенузасы жана a (же b) катети берилген: а) c=10, a=6; б) c=65, b=63; в) c=6,97, a=5,28; г) c=17,1, b=8,23. Белгисиз катетин жана бурчтарын тапкыла.

3. a (же b) катети жана анын каршысында жаткан α (же β) бурчу берилген: а) a=15, α=36,5°; б) a=3,8, α=42°15′; в) b=6,4, α=56°; г) b=12, α=18,6°. Гипотенузасын, берилген катетке жанаша жаткан тар бурчун жана экинчи катетин эсептегиле.

4. a (же b) катети жана ага жанаша жаткан β (же α) тар бурчу берилген: а) a=52,5; β=35°36′; б) a=420; β=24,8°; в) b=75; α=51°15′; г) b=5,85; α=61,25°. Гипотенузасын, берилген катетке каршы жаткан тар бурчун жана экинчи катетин тапкыла.

5. c гипотенузасы жана α (же β) бурчу берилген: а) c=10, α=36,5°; б) c=42,6, α=52°24′; в) c=1,75, β=73°; г) c=0,8, β= 48°15′. Катеттерин жана белгисиз тар бурчун тапкыла.

6. Тең капталдуу үч бурчтуктун бийиктиги 6,8 м, ал эми негизи 20,4 м. Үч бурчтуктн каптал жагын жана бурчтарын тапкыла.

7. Ромбдун а) диагоналдары 12 см жана 8 см; б) жагы 24,1 м, бийиктиги 12 м. Бурчтарын эсептегиле.

8. Тик бурчтуктун диагоналы 8,2 м болуп, жактарынын бири менен 58,5° бурчту түзөт. Анын жактарын тапкыла.

VI ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Тар бурчтун косинусуна, синусуна, тангенсине аныктама бергиле.
2. Пифагордун теоремасы кандай айтылат? Далилдөө жолу кандай?
3. Тар бурчтун тригонометриялык функцияларынын маанилери эмнеден көз каранды болот?
4. Кандай негизги тригонометриялык теңдештиктерди билесиңер?
5. α=30°, 45°, 60° болгондо, ар бир учур үчүн sinα нын, cosα нын, tgα нын маанилери эмнеге барабар?
6. Эгерде тик бурчтуу үч бурчтуктун: 1) катеттери; 2) гипотенузасы жана бир катети; 3) катети жана бир тар бурчу; 4) гипотенузасы жана бир тар бурчу берилсе, калган элементтерин кантип табууга болот?

VI ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. Тик бурчтуу үч бурчтукта: 1) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; 3) $\operatorname{tg}\alpha=1$ болсо, α бурчун түзгүлө.
2. $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ болсо, sinα нын маанисин тапкыла.
3. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

   1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1$; 2) $2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1$; 3) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.
4. Эгерде: 1) $\cos\alpha=1$; 2) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$ болсо, α бурчун тапкыла.
5. Таблицаны колдонбой туруп, sin30°+cos60° туюнтмасынын маанисин эсептегиле.
6. cos70°=sin20° болоорун далилдегиле.
7. Таблицаны колдонбой туруп, $\operatorname{tg}45°+\sin^2 17°+\cos^2 17°$ туюнтмасын эсептегиле.
8. Эгерде ромбдун диагоналдары 4,6 м жана 64,4 м болсо, анын жагын тапкыла.
9. Тик бурчтуу үч бурчтукта: а) a=9 дм, b=12 дм берилген, c, h, a_1, b_1 ди (мындагы a_1 жана b_1 — катеттердин гипотенузага түшүрүлгөн проекциялары) тапкыла; б) a=1,2 дм, c=1,3 дм берилген, b, h, a_1, b_1 ди тапкыла.
10. Радиустары 6 м жана 2 м болгон эки айлананын борборлорунун арасындагы аралык 10 м. а) Сырткы жалпы жаныманын; б) ички жалпы жаныманын кесиндисинин узундугун тапкыла.

VII глава КӨП БУРЧТУКТАР

§ 31. ТОМПОК КӨП БУРЧТУКТАР

31.1. СЫНЫК СЫЗЫКТАР

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n>2)$ чекиттеринен жана аларды удаалаш туташтырган A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ кесиндилеринен түзүлгөн фигураны $A_1A_2 \ldots A_n$ **сынык сызыгы** деп аташат. A_1, A_2, ..., A_n чекиттери сынык сызыктын чокулары, A_1A_2, A_2,A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ кесиндилери сынык сызыктын бөлүктөрү (түзүүчүлөрү) болуп эсептелишет.

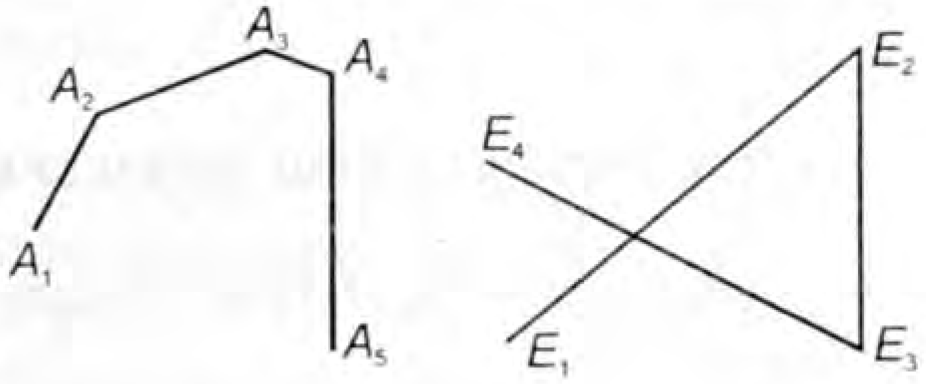
Удаалаш, жанаша жаткан ар бир эки түзүүчүсүнүн жалпы чекиттери сынык сызыктын чокулары болушат.

Сынык сызыктар ар кандай болуп берилиши мүмкүн.

Эгерде сынык сызыктын бөлүктөрү кесилишпесе жана анын жанаша жаткан эки бөлүгү бир түз сызыкта жатпаса, анда ал жөнөкөй сынык сызык деп аталат. Мисалы, 115-сүрөттө $A_1A_2A_3A_4A_5$ жөнөкөй сынык сызык, ал эми $E_1E_2E_3E_4$ жөнөкөй эмес сынык сызык болот.

Сынык сызыктын бардык түзүүчүлөрүнүн узундуктарынын суммасы **сынык сызыктын узундугу** деп аталат.

Эгерде сынык сызыктын учтарын кесинди аркылуу туташтырсак, туюк сынык сызыкка ээ болобуз.



115-сүрөт.

31. 2. КӨП БУРЧТУКТАР

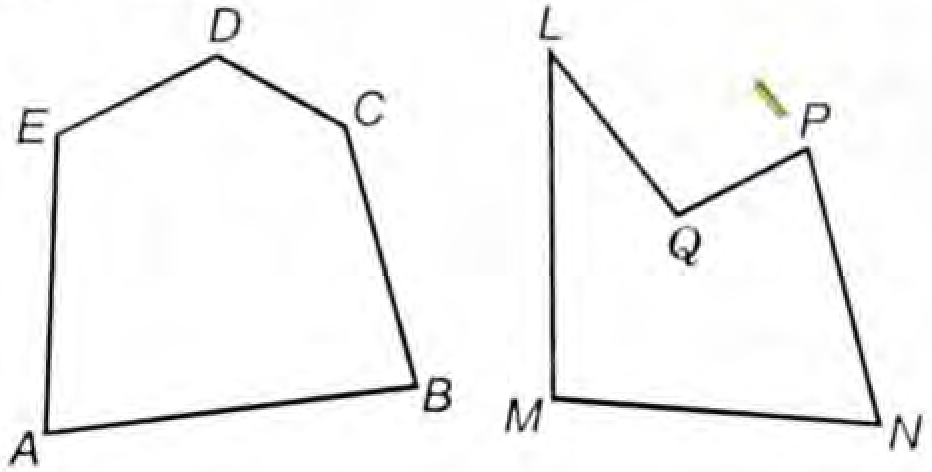
$A_1A_2 \ldots A_n$ $(n>2)$ туюк сынык сызыгы менен чектелген тегиздиктин бөлүгү **көп бурчтук** деп аталат. A_1, A_2, ..., A_nчекиттери көп бурчтуктун чокулары, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 кесиндилери көп бурчтуктун жактары болушат. Көп бурчтуктун бир жагына тиешелүү чокулары жанаша жаткан чокулар, жалпы чокуга ээ болуучу эки жагы жанаша жаткан жактары деп эсептелет.

Көп бурчтуктар чокуларынын же жактарынын санына карата мүнөздөлүп айтылат. Мисалы, үч бурчтук, төрт бурчтук, беш бурчтук жана башкалар.

Көп бурчтуктун жактарынын узундуктарынын суммасы анын **периметри** деп аталат.

Жөнөкөй туюк сынык сызык менен чектелген көп бурчтукту жөнөкөй көп бурчтук деп аташат. Ал эми жөнөкөй көп бурчтуктар өз кезегинде, чектеп турган туюк сынык сызыктарга карата эки түргө бөлүнөт: томпок жана томпок эмес. Көп бурчтуктун каалагандай жагы аркылуу түз сызык жүргүзгөндө көп бурчтук ал түз сызык аркылуу аныкталган жарым тегиздиктердин биринде гана жатса, анда ал томпок көп бурчтук болот, жарым тегиздиктердин экөөндө тең жатса, анда ал томпок эмес көп бурчтук болот.

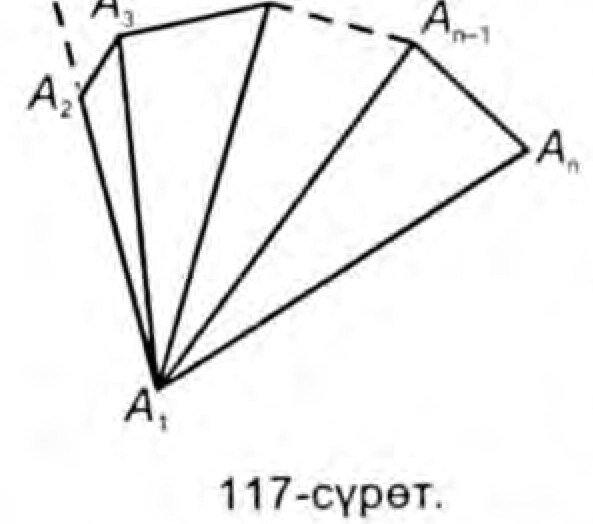
Мисалы, 116-сүрөттөгү $ABCDE$ — томпок, $MNPQL$ — томпок эмес көп бурчтук.



116-сүрөт.

31.3. ТОМПОК КӨП БУРЧТУКТАР

Томпок көп бурчтук тегиздикти эки бөлүккө бөлөт: ички жана тышкы.



117-сүрөт.

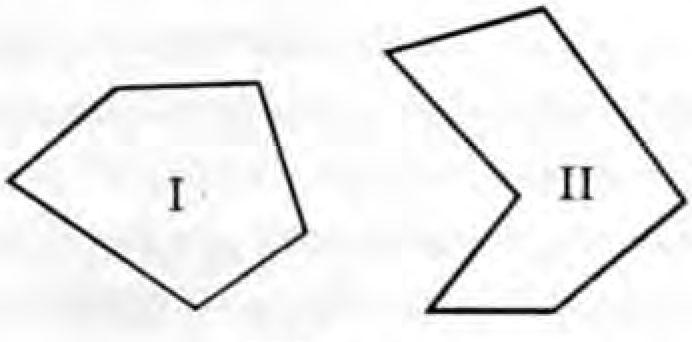
Жактарынын саны эң аз болгон томпок көп бурчтук — үч бурчтук. Чокуларынын (жактарынын) саны n ге барабар болгон томпок көп бурчтукту n бурчтук деп атайбыз (117-сүрөт). Томпок көп бурчтукту мындан ары жөн эле көп бурчтук деп атайбыз.

Жанаша жатпаган эки чокусун туташтыруучу кесиндини көп бурчтуктун диагоналы дейбиз. A_1 чокусунан чыгуучу диагоналдар A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, ..., A_1A_{n-1} болот (башка чокулар аркылуу да ушундай диагоналдар жүргүзүүгө мүмкүн). Демек, n бурчтуктун бир чокусунан чыгуучу диагоналдардын саны $n-3$ болот. Анда n бурчтукта бардыгы $n(n-3)$ диагональ болушу керек, бирок ар бир диагоналда эки чоку жаткандыктан, жалпы диагоналдардын саны $\frac{1}{2}n(n-3)$ болот.

Көп бурчтуктун бир чокусунан чыгуучу эки жагынын арасындагы бурчу анын ички бурчу деп аталат. Алар: $\angle A_1A_2A_3$, $\angle A_2A_3A_4$, ..., $\angle A_nA_1A_2$. Көп бурчтуктун ички бурчуна жандаш болгон бурч анын тышкы бурчу болот. Анда $\angle A_1A_2A_3$ бурчуна карата тышкы бурч $\angle A_3A_2B$ болуп эсептелет.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Түзүүчүлөрүнүн саны бешке барабар болгон жөнөкөй жана жөнөкөй эмес сынык сызыктарды сызгыла.
2. Эгерде $ABCDE$ жөнөкөй сынык сызыгынын ар бир түзүүчүсү 3 см болсо, анда сынык сызыктын узундугун тапкыла.
3. $KLMN$ жөнөкөй сынык сызыгы берилген. Анын узундугу KN кесиндисинин узундугунан чоң болоорун далилдегиле.
4. 118-сүрөттө эки көп бурчтук сызылган (I жана II). Ар бири канча бурчтук? Кайсынысы томпок, кайсынысы томпок эмес? Эмне үчүн?
5. $ABCDEF$ томпок алты бурчтугун сызгыла. Анын бардык чокуларын, жактарын, бурчтарын жана диагоналдарын атагыла. Белгилеп жазгыла. Канча чокусу, жагы, бурчу жана диагоналы бар?
6. а) Беш бурчтукка; б) сегиз бурчтукка; в) n бурчтукка бир чокудан чыгуучу канча диагоналды сызууга болот?
7. а) Алты бурчтукка; б) тогуз бурчтукка; в) жыйырма бурчтукка бир чокудан чыгуучу диагоналдар аркылуу канча үч бурчтук түзүлөт?
8. а) Беш бурчтуктун; б) сегиз бурчтуктун; в) n бурчтуктун ар бирине бардыгы канча диагональ жүргүзүүгө болот?



118-сүрөт.

§ 32. ТОМПОК КӨП БУРЧТУКТУН ИЧКИ БУРЧТАРЫНЫН СУММАСЫ

$A_1A_2\dots A_n$ томпок көп бурчтугу берилсин (117-сүрөт).

48-теорема. **Томпок n бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы $180°(n-2)$ ге барабар.**

Далилдөө. Берилген n бурчтукту 117-сүрөттө көрсөтүлгөндөй кылып, диагоналдар аркылуу үч бурчтуктарга бөлөбүз. Андай үч бурчтуктардын саны $n-2$ болот. Бөлүнгөн үч бурчтуктардын ички бурчтарынын суммасы көп бурчтуктун ички бурчтарынын суммасына барабар. Ар бир үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 180° ка барабар. Анда көп бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы

$$180°(n-2)$$

ге барабар. Теорема далилденди.

Натыйжа. **Томпок көп бурчтуктун тышкы бурчтарынын суммасы 360° ка барабар.**

n бурчтуктун ар бир чокусундагы ички бурчу менен тышкы бурчунун суммасы 180° ту түзөт. Демек, n бурчтуктун бардык ички бурчтарынын жана тышкы бурчтарынын суммасы $180°\cdot n$ ге барабар. Анда

$$180°\cdot n-180°(n-2)=360°$$

тышкы бурчтардын суммасына барабар. Демек, n бурчтуктун тышкы бурчтарынын суммасы n санынан көз каранды болбойт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. а) Беш бурчтуктун; б) сегиз бурчтуктун; в) жыйырма бурчтуктун ички бурчтарынын суммасын эсептегиле.
2. Эгерде алты бурчтуктун бурчтарынын чоңдуктарынын катышы 3,5:2:3:4:2,5:3 катышына барабар болсо, анын ар бир бурчун тапкыла.
3. Эгерде көп бурчтуктун жактарынын санын үчкө чоңойтсок, анда көп бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы канчага өзгөрөөрүн эсептегиле.
4. Эгерде көп бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы: а) 540° ка; б) 906° ка; в) 3600° ка барабар болсо, анын жактарынын санын тапкыла.
5. Эгерде көп бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы анын тышкы бурчтарынын суммасынан k эсе чоң болсо, көп бурчтуктун жактарынын санын тапкыла.

§ 33. ТУУРА КӨП БУРЧТУКТАР

Аныктама. **Эгерде томпок көп бурчтуктун бардык жактары барабар жана бардык бурчтары барабар болушса, анда ал туура көп бурчтук деп аталат.**

Жалпы учурда томпок көп бурчтуктун элементтери кандай аныкталса, туура көп бурчтукта да ал түшүнүктөр, белгилөөлөр сакталат. Туура көп бурчтуктардын жөнөкөйлөрү болуп тең жактуу үч бурчтук, квадрат эсептелет.

$A_1A_2 \ldots A_n$ туура көп бурчтук болсо, анда n жактуу туура көп бурчтук берилген деп айтышат. Демек, туура көп бурчтук жактарынын санына же чокуларынын санына карата аталат.

Туура n бурчтукта $n=3$ болгондо — туура (тең жактуу) үч бурчтук, $n=4$ болгондо — туура төрт бурчтук (квадрат), $n=5$ болгондо — туура беш бурчтук ж. б. деп алынат.

Туура n бурчтуктун бир жагын a_n аркылуу белгилесек, анда анын бардык жактары барабар болгондуктан, периметри

$$P_n = n \cdot a_n$$

болот (P_n — туура n бурчтуктун периметри).

Томпок n бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы $180°(n-2)$ болоору белгилүү. Туура n бурчтуктун бардык бурчтары барабар болгондуктан анын ар бир бурчу

$$\frac{180°(n-2)}{n}$$

болот, ал эми тышкы бурчу

$$\frac{360°}{n}$$

ге барабар боло тургандыгы түшүнүктүү (§ 32).

Кээде жылдызча түрүндөгү туура көп бурчтуктар да учурайт. Бирок алар томпок көп бурчтук боло алышпайт. Биз мында аларга токтолгон жокпуз.

Эки туура n бурчтуктун жактары барабар болсо, анда аларды **барабар** деп айтышат.

$A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$ туура n бурчтуктарын тиешелүү түрдө Q_1 жана Q_2 аркылуу белгилейли. Эгерде $A_1A_2=B_1B_2$ болсо, анда $Q_1=Q_2$ болот. Чындыгында алардын бирин экинчисине дал келгендей кылып беттештирүүгө болот.

Q_2 көп бурчтугу A_1A_2 түз сызыгы аркылуу аныкталган жарым тегиздиктердин биринде жатат. A_1A_2 түз сызыгында A_1 чекитинен баштап $B_1B_2=A_1A_2$ болгондой кесиндини түзүүгө болот. Анда B_1 чекити A_1 чекитине, B_2 чекити A_2 чекитине дал келет. Андан кийин Q_1 көп бурчтугу жаткан жарым тегиздикте

$\angle A_1A_2A_3=\angle B_1B_2B_3$ болгондой A_2A_3 шооласын сызабыз да, ага A_2 чекитинен баштап B_2B_3 кесиндисин өлчөп коебуз. Туура көп бурчтуктардын бурчтары барабар болгондуктан, $A_2A_3=B_2B_3$ болот, б. а. A_3 жана B_3 чокулары дал келет. Ушундай жол менен Q_2 көп бурчтугунун калган чокуларын да дал келтирүүгө мүмкүн. Демек, $Q_1=Q_2$ болот.

Эгерде ар кандай эки туура n бурчтуктун жактарынын саны бирдей, бирок барабар болбосо, аларды бир аттуу туура көп бурчтуктар деп атайбыз. Аларга көп эле мисалдар келтирүүгө болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Жактарынын саны эң аз болгон туура көп бурчтукту атагыла. Анын бир бурчу канчага барабар?
2. Жагы a га барабар болгон туура: а) 7; б) 12; в) n бурчтуктун периметрин тапкыла.
3. Туура 6 бурчтук берилген. Анын: 1) ички бурчтарынын суммасын; 2) ар бир бурчун; 3) ар бир чокудагы тышкы бурчун; 4) тышкы бурчтарынын суммасын; 5) бир чокудан чыгуучу диагоналдарынын санын; 6) бардык диагоналдарынын санын; 7) периметри 24,6 дм болсо, ар бир жагын эсептегиле.
4. Эгерде көп бурчтуктун ар бир ички бурчу: 1) 140°; 2) 150°; 3) 168° болсо, анын жактарынын санын тапкыла.
5. Эгерде туура көп бурчтуктун тышкы бурчтарынын бири: 1) 18°; 2) 12°; 3) 30° ка барабар болсо, анын жактарынын санын эсептегиле.
6. Туура: 1) 4; 2) 5; 3) 10; 4) 12 бурчтуктун ички бурчтарынын суммасын эсептегиле.
7. 6-маселеде берилген көп бурчтуктардын ар биринин бурчун эсептегиле.
8. 6-маселеде берилген көп бурчтуктардын ар бирине канча диагональ жүргүзүүгө болот?

§ 34. АЙЛАНАГА ИЧТЕН (СЫРТТАН) СЫЗЫЛГАН КӨП БУРЧТУКТАР

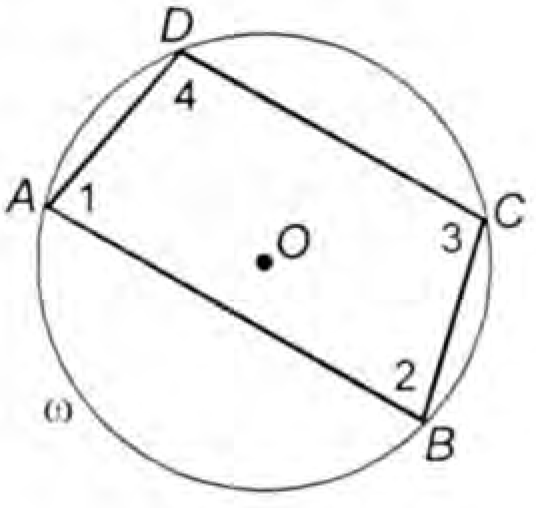
Эгерде томпок көп бурчтуктун бардык чокулары бир айланада жатса, анда көп бурчтук ал айланага **ичтен сызылган** деп аталат. Эгерде томпок көп бурчтуктун бардык жактары айлананы жанып өтсө, анда көп бурчтук айланага **сырттан сызылган** же айлана көп бурчтукка ичтен сызылган деп аталат. Демек, көп бурчтук айланага ичтен сызылганда же айлана көп бурчтукка сырттан сызылганда көп бурчтуктун бардык чокулары айлананын борборунан бирдей алыстыкта болот, ал эми айланага сырттан сызылган көп бурчтуктун бардык жактары айлананын борборунан бирдей алыстыкта жатат.

34.1. АЙЛАНАГА ИЧТЕН (СЫРТТАН) СЫЗЫЛГАН ТӨРТ БУРЧТУКТАР

Ар кандай үч бурчтуктун сыртынан (ичинен) сызылган айланалар боло тургандыгы белгилүү (§ 20). Эми ар кандай томпок төрт бурчтукка сырттан (ичтен) сызылган айланалар дайыма эле болобу деген суроо туулат. Көрсө, бардык томпок төрт бурчтукка сырттан (ичтен) сызылган айланалар табыла бербейт экен. Бул суроолорго төмөнкү теоремалар жооп берет.

49-теорема. **Эгерде айлана томпок төрт бурчтукка сырттан сызылган болсо, анда төрт бурчтуктун карама-каршы бурчтарынын суммасы 180° ка барабар болот.**

Далилдөө. $ABCD$ төрт бурчтугу жана ага сырттан сызылган $\omega(O;\ R)$ айланасы берилген (119-сүрөт). $\angle 1+\angle 3=180°$, $\angle 2+\angle 4=180°$ болоорун далилдейбиз. $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ бурчтары айланага ичтен сызылган бурчтар $\angle 1$ бурчу $B\breve{C}D$ жаасынын, $\angle 3$ бурчу $D\breve{A}B$ жаасынын жарымы менен өлчөнөт.



119-сүрөт.

$$\angle 1+\angle 3=\frac{B\breve{C}D}{2}+\frac{D\breve{A}B}{2}=\frac{B\breve{C}D+D\breve{A}B}{2}=\frac{360^{\circ}}{2}=180^{\circ}.$$

$\angle 2+\angle 4=180°$ боло тургандыгы да ушуга окшош далилденет. Теорема далилденди.

50-теорема. (49-теоремага тескери теорема). **Эгерде төрт бурчтуктун карама-каршы бурчтарынын суммасы 180° болсо, анда ага сырттан айлана сызууга болот.**

Бул теореманын далилдөөсүнө токтолбойбуз.

51-теорема. **Айланага сырттан сызылган томпок төрт бурчтуктун карама-каршы жактарынын суммалары барабар болот.**

Айланадан тышкары жаткан чекиттен айланага жүргүзүлгөн жанымалардын кесиндилеринин барабардыгын колдонуп теореманы оной эле далилдөөгө болот.

52-теорема. (51-теоремага тескери теорема). **Эгерде томпок төрт бурчтуктун карама-каршы жактарынын суммалары барабар болсо, анда ага ичтен айлана сызууга болот.**

Бул теореманы өз алдыңарча далилдегиле.

Томпок төрт бурчтукка сырттан сызылган айланалар жөнүндөгү теоремалардын (49—52-теоремалар) негизинде төмөндөгүлөрдү айтууга болот:

а) Параллелограммга (тик бурчтан айырмалуу) сырттан да, ичтен да айлана сызууга болбойт. Анткени анын карама-каршы бурчтарынын суммасы 180° ка барабар эмес. Бирок, ромбго дайыма ичтен айлана сызууга мүмкүн. Анткени — анын карама-каршы жактарынын суммалары барабар.

б) Ромбго (квадраттан айырмаланып) сырттан айлана сызууга болбойт, себеби карама-каршы бурчтарынын суммасы 180° ка барабар эмес.

в) Тик бурчтукка (квадраттан айырмаланып) сырттан айлана сызууга болот, анткени карама-каршы бурчтарынын суммасы 180° ка барабар, ал эми ага ичтен айлана сызууга болбойт, себеби карама-каршы жактарынын суммалары барабар эмес.

г) Квадратка сырттан да, ичтен да айлана сызууга болот. Анткени жогорудагы талаптар аткарылат.

Бардык учурда ичтен (сырттан) сызылган айланалардын борборлору тиешелүү төрт бурчтуктардын диагоналдарынын кесилишинде жатат.

1. Берилген айланада AC жана BD диаметрлери бири-бирине перпендикулярдуу. Эгерде: 1) A, B, C, D чекиттерин удаалаш туташтырсак, анда берилген айланага карата кандай төрт бурчтук пайда болот? 2) A, B, C, D чекиттери аркылуу берилген айланага жанымалар жүргүзсөк, алардын кесилиштеринен пайда болуучу $A'B'C'D'$ төрт бурчтугу берилген айланага карата кандай төрт бурчтук болот?
2. Тик бурчтук берилген. Ага сырттан сызылган айлананы түзгүлө.
3. Тик бурчтуктун кичине жагы a га, диагоналдарынын арасындагы тар бурчу 60° ка барабар. Тик бурчтукка сырттан сызылган айлананын диаметрин тапкыла.
4. Берилген ромбго ичтен сызылган айлананы түзгүлө.
5. Ромбдун жагы 10 м, тар бурчу 30°. Ромбго ичтен сызылган айлананын радиусун тапкыла.
6. Эгерде төрт бурчтук айланага: а) ичтен сызылса, анын карама-каршы бурчтарынын суммасы 180° ка барабар болоорун; б) сырттан сызылса, анын карама-каршы жактарынын суммалары барабар болоорун далилдегиле.
7. 6-маселенин ар бир учурунда тескери маселени баяндагыла. Аларды далилдегиле.
8. Эгерде трапеция айланага ичтен сызылса, анда ал тең капталдуу болот. Далилдегиле.

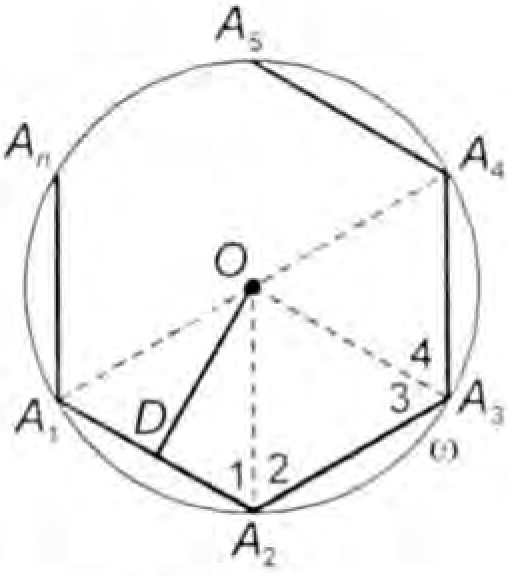
9. Төрт бурчтуктун бурчтарынын катышы ирети боюнча: 1) 4:2:5:7 ге; 2) 3:4:5:11 ге барабар болсо, анда ага сырттан айлана сызууга болобу?

10. Айланага сырттан сызылган төрт бурчтуктун үч жагынын катышы ирети боюнча 4:5:7 катышына барабар. Эгерде төрт бурчтуктун периметри 44 м болсо, анын жактарын тапкыла.

34.2. АЙЛАНАГА ИЧТЕН (СЫРТТАН) СЫЗЫЛГАН ТУУРА КӨП БУРЧТУКТАР

Эми айланага сырттан (ичтен) сызылган туура көп бурчтуктарга токтолобуз.

53-теорема. **Ар кандай туура көп бурчтукка сырттан жана ичтен айлана сызууга болот.**



120-сүрөт.

Далилдөө. $A_1A_2 \ldots A_n$ туура көп бурчтугу берилсин (120-сүрөт). Адегенде бул туура көп бурчтукка сырттан айлана сызууга болоорун, б. а. көп бурчтуктун ар бир чокусунан бирдей алыстыкта жаткан чекитти табууга мүмкүн экендигин далилдейбиз. $A_1A_2A_3$ жана $A_2A_3A_4$ бурчтарына биссектрисалар жүргүзөбүз. Алар O чекитинде кесилишет, анткени $\angle 2+\angle 3<180°$. Туура көп бурчтуктун бурчтары барабар болгондуктан, $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$ экендиги түшүнүктүү. Анда ΔA_2OA_3 — тең капталдуу болот, б. а.

$$OA_2=OA_3. \qquad (1)$$

$\Delta A_2OA_3=\Delta A_3OA_4$ ($A_2A_3=A_3A_4$, OA_3 — жалпы жак, $\angle 2=\angle 4$). Мындан

$$OA_3=OA_4 \qquad (2)$$

келип чыгат. Ушундай эле жол менен A_5, ..., A_n, A_1 чокулары да O чекитинен бирдей аралыкта экендигин далилдөөгө болот. Демек, $\omega(O;\ R)$ айланасы ($OA_1=R$) берилген туура көп бурчтукка сырттан сызылган айлана болот, R — сырттан сызылган айлананын радиусу.

Эми O борборунан туура көп бурчтуктун ар бир жагына перпендикуляр түшүрсөк, алар барабар болушат. Ошондуктан $\omega(O;\ r)$ айланасы ($OD=r$, $OD\perp A_1A_2$) берилген туура көп бурчтукка ичтен сызылган айлана болот. Теорема далилденди.

Туура көп бурчтукка сырттан (ичтен) сызылган айлананын борбору туура көп бурчтуктун борбору деп аталат. $OD=r$ кесиндисин туура көп бурчтуктун апофемасы деп атайбыз, ал ичтен сызылган айлананын радиусу болуп эсептелет.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Квадратка: а) ичтен; б) сырттан сызылган айлананы түзгүлө.
2. Квадраттын жагы a га барабар. Квадратка: а) ичтен; б) сырттан сызылган айлананын радиусун тапкыла.
3. Туура үч бурчтуктун жагы a га барабар. Үч бурчтукка: а) ичтен сызылган; б) сырттан сызылган айлананын радиусун тапкыла; в) ичтен сызылган; г) сырттан сызылган айлананы түзгүлө.
4. Туура n бурчтукка сырттан айлана сызууга болоорун далилдегиле.
5. Туура n бурчтукка ичтен айлана сызууга болоорун далилдегиле.
6. Жактарынын саны: а) 5; б) 8; в) 15; г) 48; д) n болгон туура көп бурчтуктун борбордук бурчун эсептегиле.
7. Эгерде туура көп бурчтуктун борбордук бурчу: 1) 30°; 2) 4° ка барабар болсо, анын канча жагы болот?
8. Туура көп бурчтуктун борбордук бурчу менен чокусундагы бурчунун суммасы 180° болоорун далилдегиле.
9. Айлана берилген. Ага ичтен сызылган туура: 1) 6; 2) 8; 3) 12 бурчтукту түзгүлө.
10. Айлана берилген. Ага сырттан сызылган туура: 1) 6; 2) 8; 3) 12 бурчтукту түзгүлө.
11. Айлананын радиусунун тең ортосу аркылуу өтүп, ага перпендикулярдуу болгон хорда айланага ичтен сызылган туура үч бурчтуктун жагына барабар болот. Далилдегиле.
12. Туура n бурчтуктун жагы a га барабар. Ага 1) сырттан сызылган айлананын радиусу $R=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$ (1) ге; 2) ичтен сызылган айлананын радиусу жана апофемасы $r=\frac{a}{2tg\frac{180^\circ}{n}}$ (2) ге барабар болоорун далилдегиле.

   Көрсөтмө. Туура көп бурчтуктун жагы, борбордук бурчу жана апофемасынан түзүлгөн тик бурчтуу үч бурчтуктун жактары менен бурчтарынын арасындагы байланышынан пайдалангыла.
13. 1) n=3; 2) n=4; 3) n=6 болсо, туура n бурчтуктун берилген a жагы боюнча, ага: а) сырттан; б) ичтен сызылган айланалардын радиустарын тапкыла.

   Көрсөтмө. 12-маселедеги (1) жана (2) формулаларды пайдалангыла.

14. Эгерде туура 5 бурчтуктун периметри 24 дм болсо, ага сырттан жана ичтен сызылган айланалардын радиустарын эсептегиле.

15. Радиусу R ге барабар болгон айлана берилген. Ага: а) ичтен; б) сырттан сызылган туура n бурчтуктун жагын тиешелүү түрдө $a=2R\sin\frac{180°}{n}$ (3) жана $b=2Rtg\frac{180°}{n}$ (4) барабардыктары аркылуу (a, b — тиешелүү түрдө ичтен жана сырттан сызылган туура n бурчтуктун жактары) туюнтууга болоорун далилдегиле.

16. Эгерде: 1) n=3; 2) n=4; 3) n=6 болсо, радиусу R ге барабар болгон айланага: а) ичтен; б) сырттан сызылган туура n бурчтуктун жактарын тапкыла.

17. Эгерде айлананын диаметри 18 м болсо, ага ичтен жана сырттан сызылган туура 10 бурчтуктун жактарын тапкыла.

18. Туура n бурчтукка ичтен жана сырттан сызылган айланалардын радиустарынын байланыштарын аныктагыла.

19. Жагы 14 см болгон туура алты бурчтуктун апофемасын эсептегиле.

20. Туура көп бурчтуктун жагы a га, ал эми ага сырттан сызылган айлананын радиусу R ге барабар. Көп бурчтукка ичтен сызылган айлананын радиусун тапкыла.

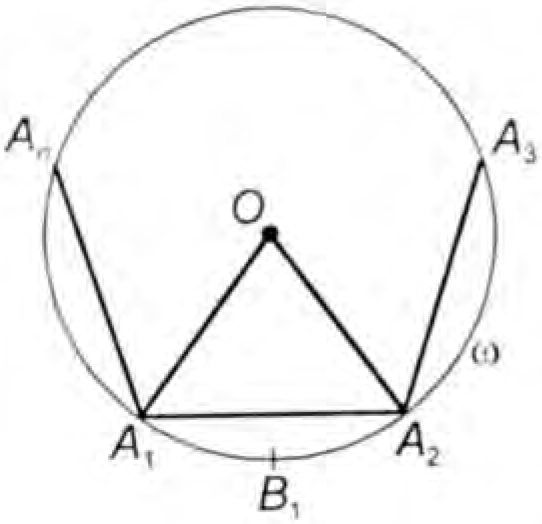
21. Туура көп бурчтуктун жагы a га, ал эми ага сырттан сызылган айлананын радиусу r ге барабар. Көп бурчтукка сырттан сызылган айлананын радиусун тапкыла.

§ 35. АЙЛАНАНЫН УЗУНДУГУ

Айлана — бул ийри сызык, ошондуктан анын узундугун кесиндиге окшоштуруп куралдар аркылуу өлчөөгө мүмкүн эмес. Ошол себептен айлананын узундугун эсептөөнү ага ичтен сызылган туура көп бурчтуктардын периметрлери менен байланыштырып эсептөө зарылдыгы келип чыгат.

Чындыгында эле, $\omega(O, R)$ айланасына ичтен сызылган туура n бурчтуктун жактарынын санын эки эселентсек, анда туура $2n$ бурчтукка ээ болобуз. Анын бир жагын a_{2n} аркылуу белгилейли, анда анын периметри $P_{2n}=2n\cdot a_{2n}$ болот (P_{2n} — туура $2n$ бурчтуктун периметри), мында $A_1A_2=a_n$ кесиндисин туура n бурчтуктун бир жагы деп кабыл алсак (121-сүрөт), анда $A_1B_1=B_1A_2=$ $=a_{2n}$ туура $2n$ бурчтуктун жагы болот.

$\Delta A_1B_1A_2$:$A_1A_2<A_1B_1+B_1A_2$, $a_n<2a_{2n}$ же $na_n<2na_{2n}$. Мындан $P_n<P_{2n}$ болот. Жактарынын санын мындай эки эселентүүнү чек-



121-сүрөт.

сиз улантууга мүмкүн. Бул учурда айланага ичтен сызылган туура көп бурчтуктун периметри улам барган сайын чоңое берет да, айлананын узундугунан ашып кетпейт. Анткени туура көп бурчтук дайыма айланага ичтен сызылган.

Демек, айланага ичтен сызылган туура көп бурчтуктун жактарынын санын чексиз чоңойткондо ал туура көп бурчтуктардын периметрлеринин удаалаштыгынын предели берилген айлананын узундугуна барабар болот деп эсептөөгө мүмкүн.

Айланага сырттан сызылган туура көп бурчтукка карата да ушундай талкуулоону айтууга болот. Мында айланага сырттан сызылган туура көп бурчтуктун жактарынын санын чоңойткондо улам кийинки көп бурчтуктардын периметрлери кичирейе тургандыгын эске алуу керек.

Айлананын узундугун аныктоодогу төмөндөгү өзгөчөлүккө токтолобуз. $\omega(O; R)$ жана $\omega'(O'; R')$ айланалары берилишсин. Алардын узундуктарын тиешелүү түрдө C жана C' аркылуу белгилейбиз. Бул эки айланага туура n бурчтуктарды ичтен сызабыз. Алардын жактары тиешелүү түрдө a_n жана a'_n болсо, анда көп бурчтуктардын периметрлери $P_n = na_n = 2R \cdot n \cdot \sin\frac{180°}{n}$, $P'_n = na'_n = 2R' \cdot n \cdot \sin\frac{180°}{n}$ болот (§ 26). Натыйжада

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'} \qquad (1)$$

болуп калат ($2R$ — ω айланасынын, $2R'$ — ω' айланасынын диаметри). (1) барабардык n дин каалагандай ($n>2$) оң бүтүн сан маанисинде туура болот. Эгерде n санын чексиз чоңойтсок, P_n жана P'_n периметрлери тиешелүү түрдө C жана C' маанилерине умтулат, ал эми $\frac{P_n}{P'_n}$ катышы $\frac{C}{C'}$ катышына умтулат. Анда (1) барабардыктан

$$\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'} \text{ же } \frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'} \qquad (2)$$

болот.

Ошентип, ар кандай айлананын узундугунун ал айлананын диаметрине болгон катышы турактуу болот. Бул турактуу катышты гректин π тамгасы («пи» деп окулат) аркылуу белгилөө кабыл алынган. π саны иррационалдуу сан, анын болжолдуу мааниси $\pi = 3{,}1416...$ түрүндө жазылат. Анда (2) барабардыктан

$$\frac{C}{2R}=\pi \quad \text{же} \quad C=2\pi R \qquad (3)$$

болот. Демек, радиусу R ге барабар болгон айлананын узундугу (3) формула аркылуу аныкталат.

360° борбордук бурчка радиусу R ге барабар болгон толук айлана туура келе тургандыгы белгилүү. Анда α борбордук бурчуна айлананын l жаасы туура келет. Демек, айлананын l жаасынын узундугу тиешелүү борбордук бурчка пропорциялаш болот. Натыйжада

$$\frac{2\pi R}{360^\circ}=\frac{l}{\alpha} \quad \text{же} \quad l=\frac{\pi R\alpha}{180^\circ} \qquad (4)$$

формуласына ээ болобуз. Демек, α борбордук бурчуна туура келүүчү жаанын узундугу (4) формула аркылуу аныкталат.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Радиусу: 1) 20 см; 2) 5,5 дм; 3) 12 м болгон айлананын узундугун тапкыла.
2. Диаметри: 1) 180 мм; 2) 2,8 м болгон айлананын узундугун эсептегиле.
3. Эгерде айлананын узундугу: 1) 62,8 дм; 2) 25,12 см; 3) 1,5 м болсо, анын радиусун тапкыла.
4. Устундун жоондугун (диаметрин) өлчөш үчүн аны жип менен курчап (айлана түрүндө) байлашат да, андан кийин ал жиптин узундугун өлчөп табышат. Эгерде устунду курчаган жиптин узундугу: 1) 1,6 м; 2) 14,8 дм болсо, анда устундун жоондугу канча болоорун эсептегиле.
5. Жер шарынын экваторунун узундугу болжол менен 40000 км ге барабар. Экватордун диаметрин эсептегиле (100 км ге чейинки тактыкта).
6. Айдын диаметри 3476 км. Айдын экваторунун узундугун тапкыла (1 км ге чейинки тактыкта).
7. Күндүн диаметри 1 392 000 км ге барабар. Күндүн экваторунун узундугун тапкыла (1000 км ге чейинки тактыкта).
8. Узундугу 12,56 см болгон айлананы түзгүлө.
9. Эгерде айланынын радиусун: 1) k эсе чоңойтсок; 2) a см ге чоңойтсок, анда айлананын узундугу кандай өзгөрөт?
10. Радиусу 0,6 м болгон дөңгөлөк 50 жолу айланганда кандай аралыкты басып өтөт?
11. Айлананын радиусу 12 см. 1) 60°; 2) 40°; 3) 150°; 4) 45°30′; 5) 75,5° борбордук бурчка туура келүүчү айлананын жаасынын узундугун тапкыла.

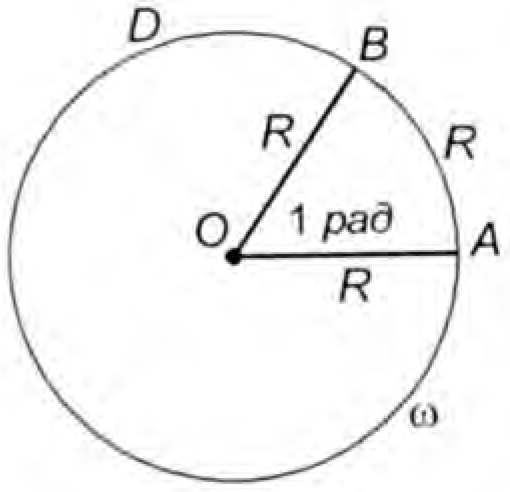
12. Эгерде жаанын узундугу l ге барабар, ал эми ага туура келүүчү бурчу: 1) 120°; 2) 24°45′ болсо, анда жаанын радиусун тапкыла.

13. 150° борбордук бурчка тирелип турган жаанын радиусу 6 см ге барабар. Узундугу ушул жаанын узундугундай айлананын радиусун тапкыла.

14. Эгерде жаанын радиусу 10 см, узундугу 4,5 см болсо, анда ага туура келүүчү борбордук бурчту тапкыла.

15. 60° борбордук бурчка тирелген жаанын узундугу 10 м болсо, анын хордасын тапкыла.

§ 36. БУРЧТУН РАДИАНДЫК ЧЕНИ



122-сүрөт.

Силер бурчтун градустук чени менен таанышсыңар (4.3). Математикада бурчту өлчөөнүн дагы бир чени колдонулат. Ал бурчту өлчөөнүн радиандык («радиан» латын сөзү, шоола, радиус деген мааниде) чени деп аталат. Анын бирдиги катары радиан кабыл алынган. Радиан — жаасынын узундугу радиуска барабар болгон борбордук бурчтун чоңдугу (122-сүрөт). Ал 1 радиан же кыскача 1 *рад* деп белгиленет. Айрым учурда радиан деген сөз жазылбай эле, бурчту мүнөздөөчү сан жазылып коюлат.

Демек, бурчтун чоңдугун радиан аркылуу аныктоодо анын чоңдугу тиешелүү жаанын узундугунун радиуска карата катышы түрүндө мүнөздөлөт. Анда радиусу R ге барабар болгон айлананын l узундуктагы жаасына туура келүүчү борбордук бурчту φ *рад* деп белгилесек, аны

$$\frac{l}{R}=\varphi\ рад \quad \text{же} \quad l=R\cdot\varphi\ рад \tag{1}$$

түрүндө жазууга мүмкүн. Эми бурчтун градустук жана радиандык чендеринин арасындагы байланышты көрсөтөбүз.

Берилген айлананын жаасынын узундугу

$$l=\frac{\pi R a^{\circ}}{180^{\circ}} \tag{2}$$

формуласы аркылуу аныкталаары белгилүү (§ 35), мында a° борбордук бурчтун градустук чени. (1) жана (2) формулалардан

$$\frac{180^{\circ}}{\pi}=\frac{a^{\circ}}{\varphi\ рад} \tag{3}$$

барабардыгын алабыз. Мындан

$$a^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi рад \qquad (4)$$

болот жана

$$\varphi рад = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot a^\circ \qquad (5)$$

болот.

Эгерде $\alpha^\circ = 180^\circ$ же борбордук бурч жарым айлананы түзсө, анда (5) тен $\varphi рад = \pi$ болот. Демек, 180° ка барабар бурчтун радиандык чени π ге барабар. Анда $180^\circ = \pi$ *рад* деп жаза алабыз. Мындан $1^\circ = \frac{\pi\ рад}{180}$ болот. Бул 1° болжол менен 0,017 *рад* га барабар.

Эми $180^\circ = \pi$ *рад* барабардыгынан $1 рад = \frac{180^\circ}{\pi}$ болот, ал болжол менен $57^\circ 17'$ ка барабар.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Айлананын толук бурчу канча радианга барабар?
2. 2 *рад* канча градуска барабар?
3. Бурчтун радиандык чени: а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) 2π болсо, анын градустук ченин тапкыла.
4. Бурчтун радиандык чени: а) 0,5 *рад* же 0,5; б) 0,2; в) 3,14...; г) 10 болсо, аны градустук чен аркылуу туюнтуп жазгыла.
5. 30°, 45°, 60°, 90°, 180° бурчтарын радиан аркылуу туюнтуп жазгыла.
6. Эгерде a бурчу: 10°, 18°, 240° болсо, аны радиандык чени аркылуу туюнтуп жазгыла.

VII ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Сынык сызыктын кандай түрлөрүн билесиңер?
2. Жөнөкөй сынык сызыктын касиетин баяндап бергиле.
3. Көп бурчтуктун аныктамасы кандай айтылат?
4. Томпок жана томпок эмес көп бурчтуктар кандай айырмаланышат?
5. Томпок n бурчтуктун канча диагоналы бар?
6. Томпок n бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы кантип эсептелет?
7. Кандай томпок төрт бурчтукка: а) сырттан; б) ичтен айлана сызууга болот?
8. Туура көп бурчтукту аныктагыла. Мисалдар келтиргиле.
9. Айланага ичтен (сырттан) сызылган көп бурчтуктарды аныктагыла.
10. Эмне үчүн туура көп бурчтукка ичтен да, сырттан да айлана сызууга боло тургандыгын түшүндүрүп бергиле.
11. Айлананын узундугу катары кандай чоңдукту алууга болот?
12. π (пи) санын кандай түшүнөсүңөр?

13. Айлананын жаасынын узундугу кантип аныкталат?
14. Бурчтун радиандык чени кандай аныкталат?

VII ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. $\omega(O; R)$ жана $\omega'(O'; R')$ айланалары берилген. $d=OO'$ — борборлорунун арасындагы аралык, $d<R+R'$ болсо, айланалардын арасындагы эң чоң (кичине) аралыкты тапкыла. *Көрсөтмө.* Сынык сызыктын касиетинен пайдалангыла.
2. Туюк томпок сынык сызыктын каалаган эки чокусунун арасындагы аралык сынык сызыктын узундугунун жарымынан чоң болбой тургандыгын далилдегиле.
3. Ички бурчтарынын суммасы 7200° ка барабар болгон томпок көп бурчтук болобу? Болсо анын жактарынын саны канча?
4. Томпок беш бурчтуктун диагоналдарынын суммасы анын жарым периметринен чоң болоорун далилдегиле.
5. Томпок төрт бурчтуктун бир жагы a га барабар. Каршысындагы жагы андан 6 эсе, калган жактары 2; 3 эсе чоң болсо, ал төрт бурчтукка ичтен айлана сызууга болобу?
6. Эгерде томпок төрт бурчтуктун бардык бурчтары барабар болсо, анда ал тик бурчтук болоорун далилдегиле.
7. Айланага сырттан сызылган трапециянын карама-каршы жактарынын суммалары барабар болоорун далилдегиле.
8. Ички бурчтарынын бири 150° ка барабар болгон туура көп бурчтук болобу? Анын жактарынын саны канча?
9. Туура беш бурчтуктун диагоналдары барабар болот. Далилдегиле.
10. Туура n бурчтуктун жактарынын ортолору экинчи туура n бурчтуктун чокулары болоорун далилдегиле.
11. Туура 12 бурчтуктун тышкы бурчун тапкыла.
12. Туура көп бурчтуктун тышкы бурчу 24° ка барабар. Анын жактарынын санын тапкыла.
13. Туура беш бурчтукта кесилишүүчү диагоналдарынын кесиндилеринин бири беш бурчтуктун жагына барабар болоорун далилдегиле.
14. Диаметри a га барабар болгон айланага туура алты бурчтук ичтен сызылган. а) Туура 6 бурчтуктун периметрин; б) айлананын узундугун тапкыла.
15. Кыргыздын ордо оюну тегерек аянтчада өткөрүлөт. Ордону чектеп турган айлананын радиусу 7 м болот. Айлананын узундугун тапкыла.

16. Автомашинанын дөңгөлөгүнүн диаметри 75 см. Машина жолдо жүрүп баратып дөңгөлөгү 10 жолу айланганда ал кандай аралыкты басып өтөт?

17. Радиусу R ге барабар болгон айлананын диаметрин: а) a га чоңойтсо (кичирейтсе); б) k эсе чоңойтсо (кичирейтсе), анда берилген айлананын узундугу кандай өзгөрөт?

18. Ромбдун жагы 15 см, ал эми бурчу 30°. Бул ромбго ичтен сызылган айлананын узундугун тапкыла.

19. Жактары a, a, a, $2a$ болгон трапецияга сырттан сызылган айлананын узундугун тапкыла.

VIII глава ФИГУРАЛАРДЫН АЯНТТАРЫ

§ 37. ЖӨНӨКӨЙ ФИГУРАЛАРДЫН АЯНТТАРЫ

37.1. ФИГУРАЛАРДЫН АЯНТТАРЫ ЖӨНҮНДӨГҮ ТҮШҮНҮК

Аянтты өлчөө байыркы мезгилден бери келаткан түшүнүктөрдүн бири. Биздин эрага чейинки III кылымда эле гректер жерди өлчөө дегенди геометрия деген сөз менен айкалыштырганы бекер эмес.

Аянт жөнүндөгү түшүнүк менен силер башталгыч мектептин математика курсунан эле таанышсыңар. Биз мында аны тереңирээк кароого аракет кылабыз. Аянт чоңдук катарында каралат. Ошондуктан адегенде аны өлчөөнүн бирдиги тандалып алынышы керек. Аянтты өлчөөнүн бирдиги катары жагы узундук бирдигине барабар болгон квадраттын аянты кабыл алынат. Аянт чоңдук болгондуктан, аларды өз ара кошууга, ошондой эле аны оң санга көбөйтүүгө болот. Бул амалдардын натыйжасында дайыма аянт келип чыгат.

Аянтын аныкташ керек болгон нерсени, тилкени же нерсенин бетин фигура катары кароого болот. Ал тегиздикте деп эсептелет.

F фигурасы берилсин. Анын аянтын $S(F)$ аркылуу белгилейбиз (S — латын алфавитинин баш тамгасы, «эс» деп окулат).

Жагы e бирдик кесиндисине барабар болгон бирдик квадраттын аянтын e^2 аркылуу белгилейбиз. F фигурасынын аянтын табыш үчүн аянты e^2 болгон бирдик квадрат ал фигурага ирети боюнча канча жолу батаарын билүү керек болот.

Эгерде

$$S(F)=k \cdot e^2 \tag{1}$$

болсо, анда k саны берилген өлчөө бирдигинде аянттын сан маанисин туюнтат. Мында F фигурасынын ичине ирети боюнча бирдик квадрат k жолу батат деп эсептелет. Мисалы, S=9 см^2 болсо, k=9, e^2=1 см^2 деп түшүнөбүз.

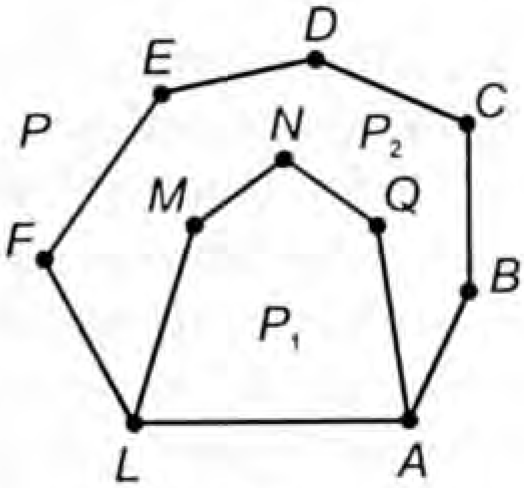
F жөнөкөй фигура, мисалы тик бурчтук же параллелограмм болсо, анда *k* нын маанисин табуу оңой. Ал эми *F* ийри сызык менен чектелген фигура болсо, анда *k* нын маанисин табуу кыйла татаал болот. Жалпысынан алганда, жогорудагыдай жол менен аянтты аныктоо теориялык жактан да, практикалык жактан да орчундуу кыйынчылыктарга дуушар болот.

Биз төмөндө жөнөкөй көп бурчтуктардын аянттарын табууга токтолобуз.

37.2. КӨП БУРЧТУКТУН АЯНТЫ

ABCDEFL жөнөкөй көп бурчтугу берилсин (123-сүрөт). Аны *P* аркылуу белгилейбиз.

Ал көп бурчтукту ичинен алынган *LMNQA* сынык сызыгы аркылуу эки көп бурчтукка ажыратууга болот: *ALMNQ* (аны P_1 аркылуу белгилейбиз) жана *ABCDEFLMNQ* (аны P_2 аркылуу белгилейбиз).



123-сүрөт.

Ал эки көп бурчтук ички жалпы чекитке ээ болбойт, алар да жөнөкөй көп бурчтуктар болушат. Бул учурда P_1 жана P_2 көп бурчтуктарынын суммасы *P* көп бурчтукту түзөт. Аны $P=P_1+P_2$ деп жазабыз же *P* көп бурчтугу P_1 жана P_2 көп бурчтуктарына ажыратылган деп эсептейбиз.

Аянт — бул жагы узундук бирдигинен турган квадрат менен туюнтулуучу жалпак фигуранын чени болуп эсептелет.

Аянттын далилдөөсүз кабыл алынган төмөндөгүдөй касиеттери бар:

1) Барабар фигуралар барабар аянттарга ээ.

2) Эгерде фигура бөлүктөргө бөлүнгөн болсо, анда анын аянты ошол бөлүктөрдүн аянттарынын суммасына барабар.

Кыскача айтканда, каалагандай фигуранын аянтын табуу талап кылынса, анда жагы узундук бирдигинен турган канча квадратты ошол фигурага батыштырууга болоорун аныктоо зарыл.

Жогорудагы түшүнүктөрдүн негизинде дагы төмөндөгүнү айтууга болот. Аянттары барабар болгон көп бурчтуктар бирдей чоңдукта деп аталат. Эки көп бурчтук чектүү сандагы бөлүктөргө бөлүнгөндө алардын тиешелүү бөлүктөрү барабар болсо, анда аларды бирдей түзүлгөн деп айтууга болот. Демек, бирдей түзүлгөн көп бурчтуктар сөзсүз бирдей чоңдукта болушат. Аларга мисалдар кийинки параграфтарда келтирилет.

37.3. ТИК БУРЧТУКТУН АЯНТЫ

54-теорема. **Тик бурчтуктун аянты жанаша жаткан эки жагынын көбөйтүндүсүнө барабар.**

Далилдөө. $ABCD$ тик бурчтугу берилип, жанаша жаткан жактары a, b болсун. Аянтын S аркылуу белгилейли.

$$S=a\cdot b \tag{1}$$

болоорун далилдейбиз. Бул аянтты жагы e бирдик кесиндисине барабар болгон бирдик квадраты аркылуу да

$$S=a\cdot b\cdot e^2 \tag{2}$$

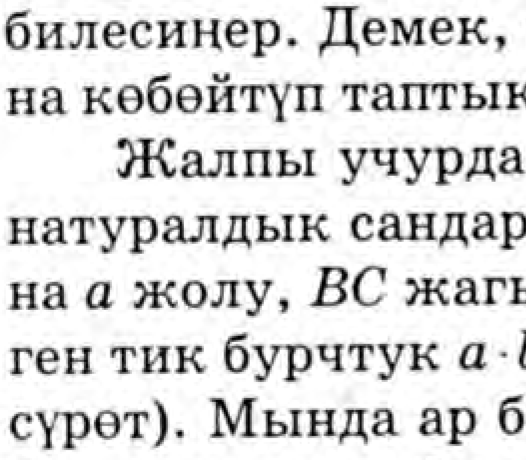
түрүндө жазууга болот, мында e^2 бирдик квадраттын аянты, аны практикада м^2 же дм^2, же см^2 ж. б. аркылуу туюнтуп жазышат.

Тик бурчтуктун a, b жактарынын узундуктарына карата үч учур каралышы мүмкүн.

1) Эгерде жактары $a=5$ см жана $b=4$ см ($e=1$ см) болгон тик бурчтук берилсе (124-сүрөт), анда жагы 1 см же аянты 1 см^2 болгон бирдик квадраттарды ага ирети боюнча тыгыз кылып 20 жолу жайлаштырууга болот. Мында $S=20$ см^2 экендигин силер билесиңер. Демек, тик бурчтуктун аянтын узундугун туурасына көбөйтүп таптык.

Жалпы учурда, $ABCD$ тик бурчтугунун жактары a жана b натуралдык сандар болсо, анда e бирдик кесиндисин AB жагына a жолу, BC жагына b жолу өлчөп коюуга болот. Анда берилген тик бурчтук $a\cdot b$ сандагы бирдик квадраттардан турат (124-сүрөт). Мында ар бир бирдик квадраттын аянты бирге барабар болгондуктан, берилген тик бурчтуктагы бардык бирдик квадраттардын аянттарынын суммасы $a\cdot b$ санына барабар болот. Демек, берилген тик бурчтуктун аянты $S=a\cdot b$ га барабар, б. а. (1) барабардык туура.

2) Тик бурчтуктун жактары a менен b чектүү ондук бөлчөк болгондо да (1) формула туура болоорун көрсөтөбүз. a, b жактары ондук белгилеринин саны n ден чоң болбогон чектүү ондук бөлчөк аркылуу туюнтулсун. Ал бирдик кесиндини барабар 10^n бөлүктөргө бөлүү аркылуу алына тургандыгы белгилүү. $e_1=\frac{e}{10^n}$ деп эсептейли.



124-сүрөт.

Эми $ABCD$ тик бурчтугунда e_1 бирдик кесиндисин AB жагына $a_1=a\cdot 10^n$, BC жагына $b_1=b\cdot 10^n$ жолу өлчөп коюуга болот. Мында a_1, b_1 сандары натуралдык сандар болоору түшүнүктүү. Анда аларга 1-учурду колдонууга мүмкүн:

$$S=a_1 \cdot b_1=a \cdot b \cdot 10^{2n} \tag{3}$$

саны бирдик квадраттар болот.

Демек, бул учурда да, тик бурчтуктун аянты жанаша жаткан a_1, b_1 эки жагынын көбөйтүндүсүнө барабар, башкача айтканда (1) барабардык туура.

3) a жана b сандарынын жок дегенде бири чексиз ондук бөлчөк аркылуу туюнтулган учурду карайбыз.

Анда аларды жакындаштырылган сандар аркылуу туюнтууга болот. Ошондуктан алардын көбөйтүндүсү жакындаштырылган сандарды көбөйтүү эрежелерине негизделген. a санынын ондук үлүштүк белгисине чейинки тактыктагы кеми менен алынган жакындаштырылган мааниси a_1 болсун, ашыгы менен алынган жакындаштырылган мааниси a_2 болсун: $a_1<a<a_2$. Ошондой эле тактыкта алынган b санынын жакындаштырылган маанилери b_1 (кеми менен) жана b_2 (ашыгы менен) болсун: $b_1<b<b_2$. Бул учурда a_1, a_2, b_1, b_2 сандарынын ар бири чектүү ондук бөлчөк болуп калат. Анда $S_1=a_1 \cdot b_1$ жана $S_2=a_2 \cdot b_2$ аянттарына ээ болобуз.

Жактары a_1, b_1 болгон тик бурчтук берилген тик бурчтуктун ичинде, ал эми жактары a_2, b_2 болгон тик бурчтук берилген тик бурчтуктун сыртында болуп калат. Демек, берилген тик бурчтуктун аянты $a_1 \cdot b_1$ жана $a_2 \cdot b_2$ сандарынын арасында жатат. Мында $a_1 \cdot b_1$ жана $a_2 \cdot b_2$ маанилери $a \cdot b$ санынын алдын ала каалаган тактыкта берилген жакындаштырылган маанилери. Эгерде n ди каалаганчалык чоң кылып алсак, анда алар $a \cdot b$ санына жакындайт. Демек, бул учурда да $S=a \cdot b$ болот (Бул жөнүндөгү толук маалымат алгебра курсунан силерге белгилүү).

Ошентип, тик бурчтуктун жактары a жана b каалагандай оң сандар болсо, анда анын аянты $S=a \cdot b$ (1) болот. Теорема далилденди.

Эгерде $b=a$ болсо, тик бурчтук квадрат болуп калат. Анда жагы a га барабар болгон квадраттын аянтын табуу формуласы (1) ден:

$$S=a^2 \tag{4}$$

болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

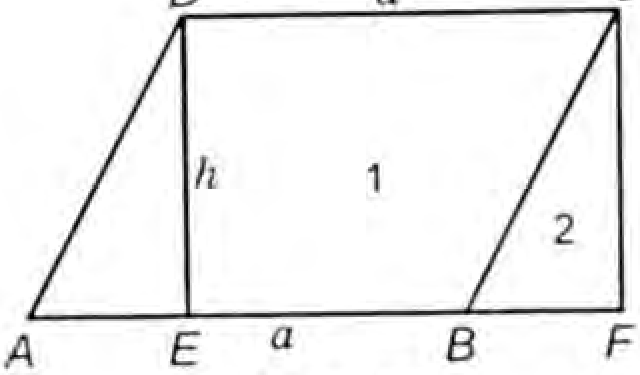
1. Жер участогунун аянты 10 га. Эгерде аянтты өлчөө бирдиги үчүн квадраттык: а) километрди; б) метрди; в) ар ды алсак, анда берилген аянттын сан мааниси канча болот?

2. Төмөндөгүлөрдү эсептегиле:

   1) 8,2 дм^2+780 см^2; 2) 1,6 м^2+640 дм^2; 3) 6 ар−204 м^2
   4) 4 га+70000 м^2

3. Жактары 16 см жана 25 см болгон тик бурчтуктун аянтын эсептегиле.
4. Квадраттын жагы 4,5 дм. Аянтын эсептегиле.
5. Квадрат формасындагы эки жер участогунун жактары 60 м жана 80 м. Ал эки участокко тең чоңдукта болгон квадрат формасындагы жер участогунун жагын тапкыла.
6. Квадраттын диагоналы d. Аянтын тапкыла.
7. Радиусу R ге барабар болгон тегерекке: а) ичтен; б) сырттан сызылган квадраттын аянтын тапкыла.
8. Бир эле тегерекке сырттан жана ичтен сызылган квадраттардын аянттарынын катышын тапкыла.
9. Эгерде квадраттын ар бир жагын: 1) 4 эсе чоңойтсок; 2) 2,5 эсе кичирейтсек, анда квадраттын аянты кандай өзгөрөт?
10. Квадраттын аянты: 1) 2 эсе чоңойсун; 2) 9 эсе кичирейсин үчүн анын ар бир жагын кандай өзгөртүү керек?
11. Туурасы 3 см болгон тик бурчтуктан аянты 9 см^2 болгон квадратты кесип алышты. Эгерде кесип алынгандан кийинки тик бурчтуктун аянты 36 см^2 болуп калса, анда ал тик бурчтуктун аянтын тапкыла.
12. Тик бурчтук формасындагы жер участогунун узуну 242,5 м жана туурасы 81,6 м. Участоктун аянтын тапкыла, маанисин *гектар* жана *ар* аркылуу туюнткула.
13. Тик бурчтуктун аянты 80 га, узуну 2 км. Периметрин эсептегиле.
14. Эгерде тик бурчтуктун жактарынын катышы 5:7 ге, аянты 140 дм^2 болсо, анын жактарын тапкыла.
15. Эгерде тик бурчтуктун периметри 96 м, ал эми аянты 540 дм^2 болсо, анын жактарын тапкыла.

§ 38. ПАРАЛЛЕЛОГРАММДЫН АЯНТЫ



125-сүрөт.

55-теорема. **Параллелограммдын аянты негизин бийиктигине көбөйткөнгө барабар.**

Далилдөө. $ABCD$ параллелограммы берилсин (125-сүрөт). $AB=a$ — негизи, $ED=h$ — бийиктиги. Бул параллелограммды $EFCD$ тик бурчтугу менен салыштырабыз. $EBCD$ — жалпы бөлүк, $\Delta AED=\Delta BFC$. Ошондуктан $S(ABCD)=S(\Delta AED)+S(EBCD)=S(\Delta BFC)+S(EBCD)=$ $=S(EFCD)$.

$$S(ABCD)=S(EFCD)=EF\cdot ED=a\cdot h.$$

Демек,

$$S(ABCD)=a\cdot h.$$

Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Параллелограммдын жагы 4,5 дм, ал жакка түшүрүлгөн бийиктиги 2,6 дм. Аянтын тапкыла.

2. Параллелограммдын жактары 15 см жана 12 см, бийиктиги 6 см. Анын экинчи бийиктигин эсептегиле. Маселенин канча чыгарылышы бар?

3. Бирден жактары барабар, ал жактарына түшүрүлгөн бийиктиктери барабар болгон параллелограмм жана тик бурчтук тең чондукта болоорун далилдегиле. Аларды бирдей түзүлгөн деп эсептөөгө болобу?

4. Параллелограммдын аянты 2,4 м^2. а) Жагы 1,5 м болсо бийиктигин; б) бийиктиги 0,6 м болсо, ага тиешелүү жагын эсептегиле.

5. Параллелограммдын жактары 24 дм жана 18 дм, ал эми алардын арасындагы бурчу: а) 30°; б) 45°; в) 60° болсо, аянтын тапкыла.

6. Эки бийиктиги жана периметри боюнча параллелограммдын аянтын аныктагыла.

7. Параллелограммдын жагы a, ал эми диагоналы d га барабар болуп, аны менен α бурчун түзөт. Параллелограммдын аянтын тапкыла.

8. Параллелограммдын жактары 14 м жана 8 м, ал эми аянты 56 м^2 болсо, параллелограммдын тар бурчун тапкыла.

9. xOy системасындагы параллелограммдын чокулары $O(0;\,0)$, $A(4;\,0)$, $B(6;\,5)$, $C(2;\,5)$ чекиттеринде жатат. Анын аянтын тапкыла.

10. Ромбдун жагы 14 см, бийиктиги 6 см. Аянтын аныктагыла.

11. Ромбдун аянты 10,6 дм^2, жагы 2,5 дм болсо, бийиктигин аныктагыла.

12. Ромбдун аянты диагоналдарынын көбөйтүндүсүнүн жарымына барабар. Далилдегиле.

13. Ромбдун жагы 12 см, бурчу 60° болсо, аянтын эсептегиле.

14. Ромбдун аянты S, бир бурчу α болсо, жагын тапкыла.

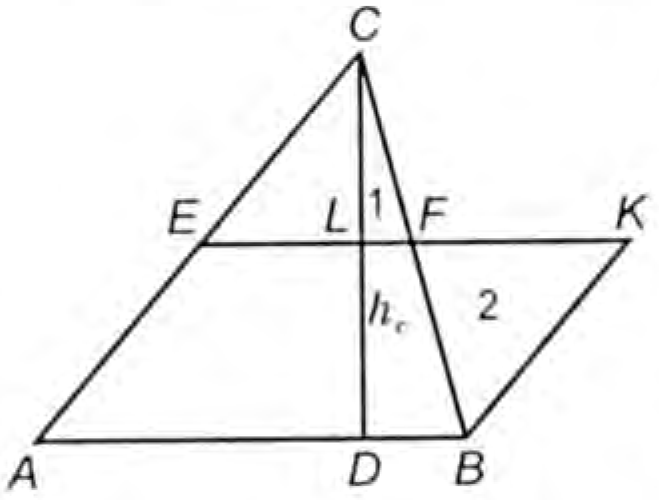
15. Ромбдун жагы a. Тапкыла: а) аянты S ке барабар болсо, ромбго ичтен сызылган айлананын радиусун; б) ичтен сызылган айлананын радиусу r болсо, ромбдун аянтын.

16. Ромбдун бийиктиги 48 м, ал эми кичине диагоналы 52 м болсо, анын аянтын тапкыла.

17. Ромбдун диагоналдарынын катышы 2:3 кө барабар, аянты 12 см^2. Анын диагоналдарын тапкыла.

§ 39. ҮЧ БУРЧТУКТУН АЯНТЫ

56-теорема. **Үч бурчтуктун аянты негизи менен ага түшүрүлгөн бийиктигинин көбөйтүндүсүнүн жарымына барабар.**



126-сүрөт.

Далилдөө. ΔABC нын $AB=c$ негизи, $CD=h_c$ бийиктиги болсо, $S(\Delta ABC)=\frac{1}{2}c\cdot h_c$ боло тургандыгын далилдейбиз (126-сүрөт).

EF орто сызыгын жүргүзүп, анын уландысына $EF=FK$ кесиндисин өлчөп коебуз. B менен K ны туташтырабыз. $ABKE$ параллелограммы келип чыгат. ($AB\|EK$ жана $AB=EK$).

Мында $\Delta EFC=\Delta BKF$ (1-белгиси боюнча, $EF=FK$, $CF=FB$, $\angle 1=\angle 2$).

$$S(\Delta ABC)=S(ABFE)+S(\Delta EFC)=S(ABFE)+S(\Delta BKF)=$$
$$=S(ABKE)=AB\cdot LD=AB\cdot\frac{CD}{2}=c\cdot\frac{h_c}{2}.$$

Мында $LD=\frac{1}{2}CD$. Ошентип, $S(\Delta ABC)=\frac{1}{2}c\cdot h_c$ болот. Теорема далилденди.

Бул теорема берилген үч бурчтуктун калган жактарына карата да туура болот: $S(\Delta ABC)=\frac{1}{2}a\cdot h_a$ же $S(\Delta ABC)=\frac{1}{2}b\cdot h_b$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

Үч бурчтуктун элементтерин белгилөөлөр жогоруда берилген.

1. Үч бурчтуктун бир жагы 34,5 дм, ага түшүрүлгөн бийиктиги 12,6 дм. Аянтын тапкыла.

2. Үч бурчтуктун аянты 36 м^2. Эгерде: а) жагы 12 м болсо, ага түшүрүлгөн бийиктигин; б) бийиктиги 4 м болсо, ага туура келүүчү жагын тапкыла.

3. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизи a, каптал жагы b болсо, аянты $S=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{4}$ (1) формуласы менен аныкталаарын далилдегиле.
4. Эгерде тең капталдуу үч бурчтуктун негизи жана каптал жагы: а) a=8 см, b=6 см; б) a=4 м, b=2,8 м болсо, ал үч бурчтуктун аянтын тапкыла.
Көрсөтмө. (1) формуланы пайдалангыла.
5. Тең капталдуу үч бурчтуктун каптал жагы 12,8 см. Эгерде негизиндеги бурчу: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 40° болсо, үч бурчтуктун аянтын эсептегиле.
6. Тең жактуу үч бурчтуктун жагы a. Аянтын тапкыла.
7. Тең жактуу үч бурчтуктун аянты S. Жагын тапкыла.
8. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери a жана b. Аянты $S=\frac{1}{2}ab$ (2) болоорун далилдегиле.
9. Эгерде тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери: 1) a=1,6 м, b=4,5 м; 2) a=5 см, b=7,6 см болсо, анын аянтын эсептегиле.
Көрсөтмө. 8-маселедеги (2) формуланы пайдалангыла.
10. ABC тик бурчтуу үч бурчтугунда a жана b анын катеттери, c — анын гипотенузасы, h — тик бурчтун чокусунан түшүрүлгөн бийиктик болсо, $ab=ch$ болоорун далилдегиле.
11. Эгерде тик бурчтуктун бир жагы үч бурчтуктун бир жагына дал келип, экинчи жагы үч бурчтуктун ал жагына түшүрүлгөн бийиктигинин жарымына барабар болсо, анда тик бурчтук менен үч бурчтуктун аянттары бирдей болоорун далилдегиле.
12. ABC үч бурчтугунун жактары a, b, c берилген. Анын аянты $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (3) формуласы боюнча аныкталаарын далилдегиле, мында p — үч бурчтуктун жарым периметри.
Көрсөтмө. Жактары боюнча үч бурчтуктун бир бийиктигин эсептеп, андан кийин формуланы жөнөкөйлөштүрүү керек.
13. Эгерде үч бурчтуктун жактары: 1) 29; 25; 6; 2) 5; 6; 9; 3) 6; 5; 2,2; 4) 5; 4; $\sqrt{17}$ болсо, аянтын эсептегиле.
14. Үч бурчтуктун жактары 25 м, 29 м, 36 м болсо, анын эң кичине бийиктигин тапкыла.
15. Үч бурчтуктун жактары 13 см, 14 см, 15 см болсо, эң чоң бийиктигин тапкыла.
16. Радиусу R ге барабар болгон тегерекке ичтен сызылган туура үч бурчтуктун аянтын эсептегиле.
17. Радиусу r ге барабар болгон тегерекке сырттан сызылган туура үч бурчтуктун аянтын эсептегиле.

18. *ABC* үч бурчтугунун a, b жактары, алардын арасындагы γ бурчу берилсе, ал үч бурчтуктун аянты $S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$ (4) формуласы аркылуу табылаарын далилдегиле.

19. Эгерде үч бурчтуктун эки жагы жана алардын арасындагы бурчу: 1) $a=12$; $b=8,4$; $\gamma=30°$; 2) $a=7,8$; $b=15$; $\gamma=50°$; 3) $b=3,4$; $c=5$; $\alpha=70°$; 4) $a=0,8$; $c=0,6$; $\beta=110°$; болсо, аянтын тапкыла.
Көрсөтмө. 18-маселедеги (4) формуланы пайдалангыла.

20. *ABC* үч бурчтугунун a жагы жана ага жанаша жаткан β, γ эки бурчу берилсе, анын аянтын $S=\frac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\cdot\sin\alpha}$ (5) формула боюнча табууга болоорун далилдегиле, мында $\alpha=180°-(\beta+\gamma)$.
Көрсөтмө. Бурчтун синусунун аныктамасын колдонуп, b жана c жагын табуу сунуш кылынат.

21. Эгерде үч бурчтуктун бир жагы, ага жанаша жаткан эки бурчу: 1) $a=16$; $\beta=120°$; $\gamma=30°$; 2) $a=15,6$; $\beta=48°$; $\gamma=70°$; 3) $b=8$; $\alpha=37°$; $\gamma=63°$; 4) $c=0,8$; $\alpha=112°$; $\beta=40°$; болсо, анын аянтын эсептегиле.

Көрсөтмө. 20-маселедеги (5) формуланы пайдалануу сунуш кылынат.

22. *ABC* тик бурчтуу үч бурчтугунун бир катети жана гипотенузасы берилген. Аянтын эсептегиле.

23. *ABC* үч бурчтугунун a, b, c жактары берилген. Үч бурчтукка: а) сырттан сызылган айлананын радиусу $R=\frac{abc}{4S}$; б) ичтен сызылган айлананын радиусу $r=\frac{S}{p}$ болоорун далилдегиле. Мында S — үч бурчтуктун аянты, p — жарым периметри.

24. 13-маселеде берилген үч бурчтукка: а) сырттан; б) ичтен сызылган айлананын радиусун тапкыла.

25. Берилген *ABC* үч бурчтугуна *BC* негизи боюнча аны менен бирдей аянтка ээ болгон *A'BC* үч бурчтугун түзгүлө.

26. *ABC* үч бурчтугу берилген. Аны бирдей аянттарга ээ болгон төрт үч бурчтукка бөлгөндөй кылып *A* чокусу аркылуу түз сызыктар жүргүзгүлө.

27. Параллелограммдын диагоналдары аны бирдей аянтка ээ болгон төрт үч бурчтукка бөлөөрүн далилдегиле.

§ 40. ТРАПЕЦИЯНЫН АЯНТЫ

57-теорема. **Трапециянын аянты негиздеринин узундуктарынын суммасынын жарымын (орто сызыгын) бийиктигине көбөйткөнгө барабар.**

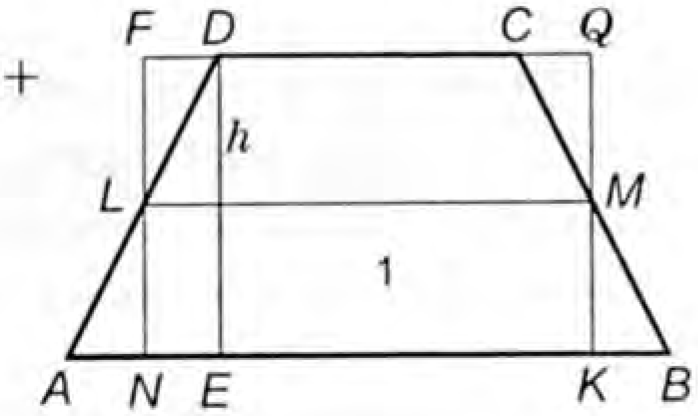
Далилдөө. $ABCD$ трапециясы берилсин (127-сүрөт). $AB=a$, $DC=b$ негиздери, $DE=h$ — бийиктиги. LM — орто сызыгы, $LM=\frac{a+b}{2}$ боло тургандыгы белгилүү. L, M чекиттеринен трапециянын негиздерине перпендикуляр түз сызыктар жүргүзсөк, $NKQF$ тик бурчтугуна ээ болобуз: $NK=LM$, $FN=DE$.

Берилген трапеция менен тик бурчтукту салыштырабыз: $NKMCDL$ жалпы бөлүк, $\Delta ANL=\Delta LDF$, $\Delta KBM=\Delta MQC$, анткени тик бурчтуу үч бурчтуктардын тиешелүү гипотенузалары жана бирден тар бурчтары барабар.

$$S(ABCD)=S(\Delta ANL)+S(NKMCDL)+$$
$$+S(\Delta KBM)=S(\Delta LDF)+S(NKMCDL)+$$
$$+S(\Delta MQC)=S(NKQF)=NK\cdot FN=$$
$$=LM\cdot DE=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

$$S(ABCD)=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

Теорема далилденди.



127-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Негиздери 15 см жана 19 см, ал эми бийиктиги 18 см болгон трапециянын аянтын тапкыла.
2. Трапециянын негиздери 3,5 дм жана 2,9 дм, ал эми аянты 2,56 дм^2. Трапециянын бийиктигин тапкыла.
3. Трапециянын бийиктиги 16 см, аянты 4 дм^2. Орто сызыгынын узундугун тапкыла.
4. Трапециянын аянты 288 см^2, негиздеринин катышы 4:5 ке барабар, бийиктиги 3,2 дм. Негиздерин эсептегиле.
5. Трапециянын чоң негизи 42 м, бийиктиги 15 м, ал эми каптал жактарынан негизине түшүрүлгөн проекциялары бийиктигине барабар. Трапециянын аянтын тапкыла.
6. Тең капталдуу трапециянын негиздери 5,1 дм жана 6,9 дм, каптал жагы 41 см. Аянтын тапкыла.
7. Тең капталдуу трапециянын чоң негизи a, каптал жагы c, негизиндеги тар бурчу a болсо, анын аянты $S=(a-c\cdot\cos\alpha)\cdot c\cdot\sin\alpha$ (1) формуласы аркылуу табылаарын далилдегиле.
8. Тең капталдуу трапециянын чоң негизи a=22 см, каптал жагы c=8 см жана негизиндеги тар бурчу: 1) 30°; 2) 45°; 3) 70°; 4) 20° берилген. Аянтын эсептегиле.

Көрсөтмө. 7-маселедеги (1) формуланы пайдалангыла.

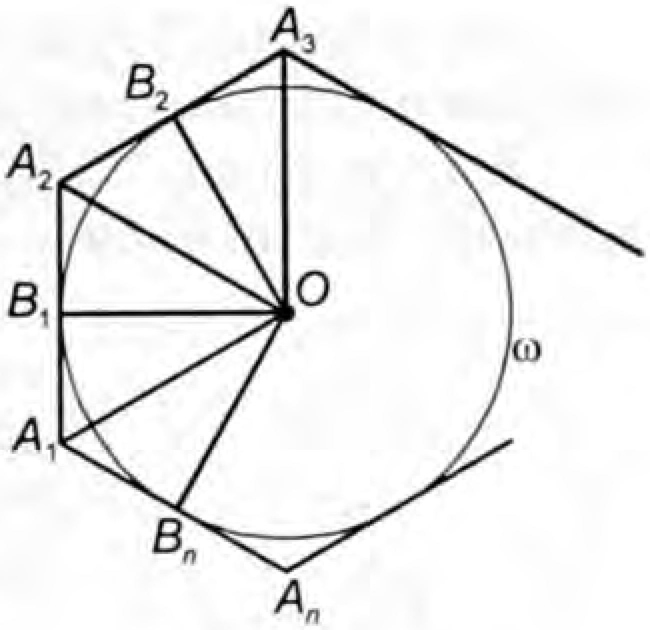
9. Тик бурчтуу трапециянын негизиндеги тар бурчу 30°, негиздеринин суммасы k жана каптал жактарынын суммасы q. Трапециянын аянтын тапкыла.
10. Трапециянын негиздери 6 дм жана 2 дм, каптал жактары 0,13 м жана 0,37 м. Аянтын тапкыла.
11. Тең капталдуу трапециянын чоң негизи 22 м, каптал жагы 8,5 м жана диагоналы 19,5 м. Трапециянын аянтын аныктагыла.
12. Тең капталдуу трапециянын диагоналдары өз ара перпендикулярдуу. Негиздери 24 см жана 40 см. Анын аянтын эсептегиле.
13. Бийиктиги h, ал эми диагоналдары өз ара перпендикуляр болгон тең капталдуу трапециянын аянтын аныктагыла.
14. Трапециянын негиздери 1,42 м жана 0,89 м, ал эми диагоналдары 1,2 м жана 1,53 м. Аянтын тапкыла.
15. Радиусу R ге барабар болгон тегеректин борборунун бир жагында жатып, бири-бирине параллель болгон эки хорда жүргүзүлгөн, ал хордалар 60° жана 120° жааларга тирелген. Хордалардын учтарын туташтыргандан пайда болгон трапециянын аянтын тапкыла.
16. ABC үч бурчтугуна DE орто сызыгы ($D \in AC$, $E \in BC$) жүргүзүлгөн. 1) ABC жана DEC үч бурчтуктарынын аянттарынын катышын; 2) ABC үч бурчтугу менен $ABED$ трапециясынын аянттарынын катышын; 3) DEC үч бурчтугунун жана $ABED$ трапециясынын аянттарынын катышын тапкыла.
17. Тең капталдуу трапеция айланага сырттан сызылган. Каптал жагы жануу чекити аркылуу 0,4 дм жана 0,9 дм узундуктагы кесиндилерге бөлүнгөн. Трапециянын аянтын тапкыла.

§ 41. АЙЛАНАГА СЫРТТАН (ИЧТЕН) СЫЗЫЛГАН КӨП БУРЧТУКТАРДЫН АЯНТТАРЫ

Адегенде томпок көп бурчуктуктун аянтын аныктоо жөнүндөгү жалпы суроого кыскача токтолобуз. Ал § 37.2 тагы аныктамага негизделген.

Каалагандай P жалпак көп бурчтугу берилсин. Аны Δ_i (i=1, 2, …, n) үч бурчтуктарга бөлөбүз (алар ички жалпы чекитке ээ болушпайт жана суммасы P көп бурчтукту түзөт). Ал үч бурчтуктардын ар биринин тиешелүү негизи a_i, ал эми ага тиешелүү бийиктиги h_i болсун, анда, алар аркылуу $S_i(\Delta_i)=\frac{1}{2}a_i \cdot h_i$ аянтын табууга болот. Эми P көп бурчтугунун аянты Δ_i үч бурчтуктарынын аянттарынын суммасынан турат деп эсептөөгө болот $S(P)=S_1(\Delta_1)+S_2(\Delta_2)+\ldots+S_n(\Delta_n)$.

Демек, көп бурчтуктун аянтын эсептөө үчүн (жалпы учурда) аны үч бурчтуктарга бөлүп, ал үч бурчтуктардын аянттарынын суммасын табуу керек.



128-сүрөт.

$\omega(O, r)$ айланасына сырттан сызылган $A_1 A_2 \ldots A_n$ көп бурчтугу берилсин (128-сүрөт), аны Q аркылуу белгилейбиз. Анын жактарынын жануу чекиттери тиешелүү түрдө $B_1 B_2 \ldots B_n$ болушсун.

O борборун берилген көп бурчтуктун чокулары жана жануу чекиттери менен туташтырабыз. $OB_1=OB_2=\ldots OB_n=r$ болот.

58-теорема. **Айланага сырттан сызылган көп бурчтуктун аянты анын периметринин жарымын берилген айлананын радиусуна көбөйткөнгө барабар:**

$$S(A_1A_2\ldots A_n)=S_1(A_1A_2O)+S_2(A_2A_3O)+\ldots+S_n(A_nA_1O)=$$

$$=\frac{1}{2}A_1A_2 \cdot OB_1+\frac{1}{2}A_2A_3 \cdot OB_2+\ldots+\frac{1}{2}A_nA_1 \cdot OB_n=p \cdot r$$

Мындагы S, S_1, ..., S_n көп бурчтуктун жана тиешелүү үч бурчтуктардын аянттары, $P=A_1A_2+\ldots+A_nA_1$ — көп бурчтуктун периметри, p — анын жарым периметри. Демек,

$$S(Q)=p \cdot r \tag{1}$$

болот. Теорема далилденди.

1-натыйжа. **Айланага сырттан сызылган туура n бурчтуктун аянты**

$$S_n = \frac{n \cdot a \cdot r}{2} \tag{2}$$

болот. Мында S_n — туура n бурчтуктун аянты, $P_n=na$ — периметри, a — анын бир жагы, r — ичтен сызылган айлананын радиусу. Бул (1) формуладан алынат.

2-натыйжа. **Жактары a, b, c болгон айланага сырттан сызылган үч бурчтуктун аянты**

$$S=\frac{a+b+c}{2} \cdot r = pr \tag{3}$$

болот.

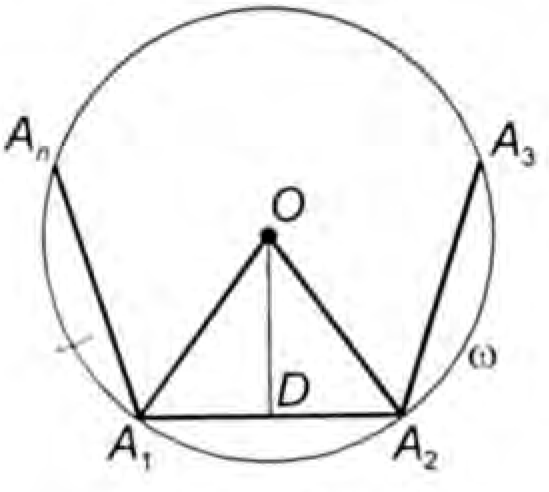
Мында p — үч бурчтуктун жарым периметри.

59-теорема. **Туура n бурчтуктун аянты анын жарым периметрин апофемасына көбөйткөнгө барабар.**

Далилдөө. $A_1A_2 \ldots A_n$ туура n бурчтугу берилсин, аны Q_n аркылуу белгилейбиз. $A_1A_2=a$ деп эсептейли (129-сүрөт). Туура n бурчтукка сырттан сызылган айлана $\omega(O, R)$ болсун. $OA_1=R$, OD — апофема болот. $\Delta A_1OA_2=\Delta A_2OA_3=\ldots=\Delta A_nOA_1$. Бул үч бурчтуктардын аянттарынын суммасы Q_n көп бурчтугунун аянтына барабар. $S(Q_n)=$ $=n \cdot S(A_1OA_2)=n \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot OD$. $\frac{a \cdot n}{2}=p$ — бул Q_nдин жарым периметри. Демек,

$$S(Q_n)=p \cdot OD.$$

Теорема далилденди.



129-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Томпок төрт бурчтуктун диагоналдары өз ара перпендикулярдуу болушса, анда анын аянты диагоналдарынын көбөйтүндүсүнүн жарымына барабар болоорун далилдегиле.
2. *ABCD* томпок төрт бурчтугунун диагоналдары бири-бирине перпендикулярдуу жана узундуктары 12,4 см, 15 см. Анын аянтын тапкыла.
3. Аянты берилген параллелограммдын аянтына барабар болгондой үч бурчтукту түзгүлө.
4. Төрт бурчтуктун жактары 5 м, 4 м, 3 м жана 2,5 м. Анын бир диагоналы 4,5 м. Аянтын тапкыла.
   Көрсөтмө. Диагоналдары аркылуу аныкталган эки үч бурчтуктун аянттарын табуу сунуш кылынат.
5. Үч бурчтуктун медианасы ал үч бурчтукту бирдей аянтка ээ болгон 2 үч бурчтукка бөлөөрүн далилдегиле.
6. Айланага сырттан сызылган төрт бурчтуктун аянты анын периметринин жарымын айлананын радиусуна көбөйткөнгө барабар болоорун далилдегиле.
7. Айланага сырттан сызылган көп бурчтуктун периметри 6 дм, ал эми аянты 2,4 дм^2. Айлананын радиусун тапкыла.
8. Радиусу 3 дм болгон айланага сырттан сызылган көп бурчтуктун аянты 60 дм^2. Көп бурчтуктун периметрин тапкыла.
9. Туура алты бурчтуктун жагы a га барабар. Аянтын тапкыла.
10*. Жагы a га барабар болгон туура n бурчтуктун аянтын $S=\frac{na^2}{4} \cdot \frac{\cos\frac{180^\circ}{n}}{\sin\frac{180^\circ}{n}}$ (1) формуласы аркылуу аныктоого боло тургандыгын далилдегиле, S — аянт, $n>2$.

11. Жагы a га барабар болгон туура: 1) үч; 2) төрт; 3) беш; 4) алты; 5) он эки бурчтуктун аянтын эсептегиле.

Көрсөтмө. 10-маселедеги (1) формуланы пайдалангыла.

12. 11-маселени $a=4$ м үчүн чыгаргыла.

13.*Радиусу R ге барабар болгон айланага ичтен сызылган туура n бурчтуктун аянтын $S=nR^2\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}\cdot\cos\frac{180^\circ}{n}$ (2) формуласы менен табууга мүмкүн экендигин далилдегиле.

14. Радиусу R ге барабар болгон айланага ичтен сызылган туура: 1) үч; 2) төрт; 3) беш; 4) алты; 5) он эки бурчтуктун аянтын эсептегиле.

Көрсөтмө. 13-маселедеги (2) формуланы пайдаланууу сунуш кылынат.

15. 14-маселени $R=2$ дм үчүн эсептегиле.

16.*Радиусу r ге барабар болгон айланага сырттан сызылган туура n бурчтуктун аянтын $S=nr^2\cdot\frac{\sin\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{180^\circ}{n}}$ (3) формуласы аркылуу эсептөөгө болоорун далидегиле.

17. Радиусу r ге барабар болгон айланага сырттан сызылган туура: 1) үч; 2) төрт; 3) беш; 4) алты; 5) жети; 6) сегиз; 7) он; 8) он эки бурчтуктун аянтын тапкыла.

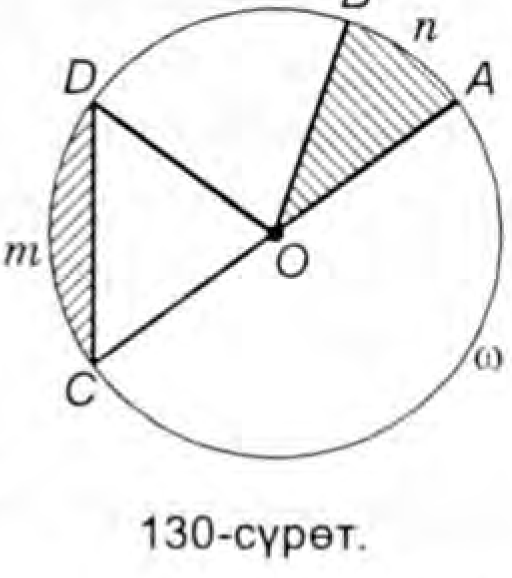
Көрсөтмө. 16*-маселедеги (3) формуланы пайдалангыла.

18. 17-маселени $r=10$ см үчүн эсептегиле.

§ 42. ТЕГЕРЕКТИН ЖАНА АНЫН БӨЛҮКТӨРҮНҮН АЯНТТАРЫ

Айлана менен тегерек тыгыз байланышта. Тегиздиктин айлана менен чектелген бөлүгү **тегерек** деп аталат (130-сүрөт). Демек, тегерек — бул сызык эмес, ал тегиздиктин кандайдыр бир айлана менен чектелген бөлүгү. Ага көп эле мисалдарды келтирүүгө болот. Мисалы, тегерек диска, тегерек медаль, тегерек жетон ж. б. (130-сүрөт).

Тегерек айлана менен чектелгендиктен, айлананын борбору (O), радиусу (OA) жана диаметри (CA) тегеректин да борбору, радиусу жана диаметри болушат. Тегеректин радиусун R аркылуу белгилесек, $OA=R$ болот. Демек, айланада жана анын ичинде жаткан чекиттер — ал айлана чектеп тур-



130-сүрөт.

ган тегеректе жаткан чекиттер да болушат. Анда O борбору да ал тегеректин чекити болуп эсептелет. Ошентип, тегеректе жатуучу ар кандай M чекити үчүн $OM \leq R$ шарты аткарылат.

Тегеректин аянтын көп бурчтуктун аянтын табууга окшоштуруп аныктоо мүмкүн эмес, анткени ал ийри сызык (айлана) менен чектелген. Ошондуктан анын аянтын табуунун жөнөкөй ыкмасын карап көрөбүз. Ал айлананын (тегеректин) ичтен сызылган туура n бурчтуктун аянтын табууга (§ 41, 59-теорема) жана айлананын узундугун (§ 35) табууга байланыштуу.

Айланага ичтен сызылган туура n бурчтуктун (Q_n) аянты

$$S(Q_n) = \frac{1}{2} P \cdot OD \qquad (1)$$

формуласы менен эсептеле тургандыгы белгилүү, мында P — Q_n туура n бурчтугунун периметри, OD — анын апофемасы (129-сүрөт).

Эгерде бул Q_n көп бурчтугунун жактарынын санын чексиз эки эселенте берсек, улам кийинки периметрлер чоңое башташат. Демек, n дин чоңоюшу менен (1) формуланын негизинде Q_n көп бурчтуктарынын аянттары да чоңое беришет, алар тегеректин аянтына жакындашат, ошону менен бирге тегеректин аянтынан ашып кетпейт. Анткени, жактары эки эселенген туура көп бурчтуктар дайыма айлананын ичинде болушат.

Демек, айланага ичтен сызылган туура көп бурчтуктун жактарынын санын чексиз эки эселентип чоңойткондо аларга туура келүүчү көп бурчтуктардын аянттарынын удаалаштыгынын умтулган предели берилген тегеректин аянтына барабар болот деп эсептөөгө болот.

Айланага сырттан сызылган көп бурчтукка карата да ушундай эле талкуулоону жүргүзүүгө болот. Мында сырттан сызылган көп бурчтуктун жактарынын санын чексиз эки эселенткенде периметрлер кичирее баштагандыктан аларга туура келүүчү көп бурчтуктардын аянттары да кичирее тургандыгын эске алуу керек. Ошентип, (1) формуладан төмөндөгүнү алабыз:

Q_n көп бурчтугунун жактарынын санын чексиз эки эселентип чоңойткондо P периметри айлананын узундугуна, OD апофемасы айлананын радиусуна, $S(Q_n)$ аянты тегеректин аянтына умтулат. Тегеректин аянтын S аркылуу белгилесек, (1) формуладан

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R \text{ же } S = \pi R^2 \qquad (2)$$

болот, мында R — тегеректин радиусу.

Айланага ичтен сызылган туура n бурчтуктун жактарынын санын чексиз эки эселенткенде анын OD апофемасы ал айлананын радиусуна умтула тургандыгын төмөндөгүдөй да көрсөтүүгө болот.

A_1A_2 кесиндиси туура n бурчтуктун бир жагы болгондуктан, $\angle A_1OA_2 = \frac{360°}{n}$ — борбордук бурч, ал эми $\angle A_1OD = \frac{180°}{n}$ болот (129-сүрөт). ΔA_1OD тик бурчтуу үч бурчтук.

Тик бурчтуу үч бурчтуктун α тар бурчуна жанаша жаткан катеттин гипотенузага болгон катышы ал бурчтун косинусуна барабар экендиги белгилүү. Анда

$$\frac{OD}{R} = \cos\frac{180°}{n} \quad \text{же} \quad OD = R\cos\frac{180°}{n} \tag{3}$$

болот, мында $OA_1 = R$ болот да, n чексиз чоңойгондо $\frac{180°}{n}$ бурчу кичирейип, нөлгө жакындайт. Бул учурда $\cos\frac{180°}{n}$ дин мааниси бирге жакындайт, бирок бирден чоң боло албайт. Анда (3) формулада OD апофемасы R ге жакындайт.

Тегеректин эки радиусу менен чектелген бөлүгү анын **сектору**[1] деп аталат. $\omega(O, R)$ тегерегине (айланага окшош белгилейбиз) OA жана OB радиустарын жүргүзсөк, тегеректин OAB бөлүгү анын секторун түзөт (130-сүрөт).

Бул секторго $\angle AOB=\alpha$ борбордук бурчу туура келет, аны сектордун бурчу деп да атайбыз.

Сектордун аянты анын борбордук бурчу аркылуу аныкталат. Эгерде 360° борбордук бурчка туура келүүчү тегеректин аянты $S=\pi R^2$ болсо, α борбордук бурчка туура келүүчү сектордун аянты:

$$S_{сек}=\frac{\pi R^2\alpha°}{360°}. \tag{4}$$

Сектордун аянты (4) формула аркылуу аныкталат.

Тегеректи кесип өтүүчү CD түз сызыгы тегеректи эки бөлүккө бөлөт, алардын ар бир тегеректин **сегменти**[2] деп аталат.

Бул тегеректин CD хордасы жана CmD жаасы менен чектелген бөлүгү катарында каралат (130-сүрөт). Сегменттин аянтын $S_{сег}$ аркылуу белгилейбиз. Анын аянтын табыш үчүн $CmDO$ секторунун аянтынан OCD үч бурчтугунун аянтын кемитебиз:

$$S_{сег}=S_{сек}(CmDO)-S(\Delta COD). \tag{5}$$

---

[1] Латын сөзү, бөлүнүп алынуучу дегенди түшүндүрөт.

[2] Латын сөзү, кесинди, бөлүк, тилке дегенди түшүндүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Тегеректин радиусу: 1) 15 см, 2) 5 дм, 3) 4,6 м. Анын аянтын эсептегиле ($\pi \approx 3,14$ деп алгыла).
2. Тегеректин диаметри: 1) 13 м; 2) 20 см; 3) 12,4 дм. Анын аянтын тапкыла.
3. Эгерде тегеректин аянты: 1) 200,96 дм^2; 2) 7,065 м^2 болсо, анын радиусун эсептегиле.
4. Диаметри 1 дм болгон аба насосунун поршениндеги тегерегинин аянтын эсептегиле.
5. Устунду курчап байлаган жиптин узундугу 1,6 м. Устундун туурасынан кесилиши тегерек формасында болсо, анын аянтын эсептегиле.
6. Айлананын узундугу 18 см болсо, ал чектеп турган тегеректин аянтын эсептегиле.
7. Тегеректин аянты 113,04 дм^2 болсо, анын айланасынын узундугун тапкыла.
8. Эгерде тегеректин аянты ага сырттан сызылган квадраттын аянтынан 55,04 дм^2 ка кичине болсо, тегеректин аянтын тапкыла.
9. Туура: 1) үч; 2) төрт; 3) алты; 4) он эки бурчтукка ичтен жана сырттан сызылган тегеректин аянттарынын катышын тапкыла.

   Көрсөтмө. § 41 гы 13- жана 16- маселелердин (2) жана (3) формулаларынан пайдалангыла.
10. Радиустары 18 см жана 12 см болгон борбордош эки айлана аркылуу чектелген шакекченин аянтын тапкыла.
11. Радиусу 8 см, ал эми бурчу: 1) 24°; 2) 36°; 3) 120° болгон сектордун аянтын тапкыла.
12. Эгерде сектордун аянты Q, ал эми бурчу: 1) 75°; 2) $2°30'$; 3) 150° болсо, сектордун радиусун эсептегиле.
13. Сектордун радиусу 3 см, ал эми аянты 6,28 см^2. Борбордук бурчун аныктагыла.
14. Радиусу R ге барабар болгон тегеректин: 1) 90°; 2) 60°; 3) 45°; 4) 30° жаасына туура келүүчү сегменттин аянтын тапкыла.
15. Хордасы a га барабар болгон жаа: 1) 120°; 2) 90°; 3) 60° болсо, анда ага туура келүүчү сегменттин аянтын тапкыла.

VIII ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Аянттын бирдиги кантип тандалып алынат?
2. Аянттын сан маанисин кандай түшүнүүгө болот?
3. Аянттын чоңдугу эмнеден көз каранды болот?

4. Көп бурчтуктардын суммасы дегенди кандай түшүнөбүз?
5. Жөнөкөй көп бурчтуктун аянты дайыма боло тургандыгын түшүндүргүлө.
6. Көп бурчтуктун аянты кантип аныкталат?
7. Тик бурчтуктун аянты кантип табылат?
8. Параллелограммдын аянтын аныктоонун жолу кандай?
9. Үч бурчтуктун аянты кантип табылат?
10. Трапециянын аянты эмнеге барабар?
11. Айланага сырттан сызылган көп бурчтуктун аянты эмнеге барабар?
12. Туура көп бурчтуктун аянты кантип аныкталат?
13. Бирдей түзүлгөн көп бурчтуктардын аянттарынын катышы эмнеге барабар? Кантип аныкталат?
14. Тегеректин аянтын аныктоо жолун айтып бергиле.
15. Сектордун, сегменттин аянттары кандай жол менен табылат?

VIII ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. Тик бурчтуктун периметри 30 м, аянты 56 $м^2$ болсо, анын жактарын эсептегиле.
2. Тең капталдуу трапеция айланага сырттан сызылган. Каптал жагы жануу чекиттери аркылуу 4 см жана 9 см ге бөлүнөт. Трапециянын аянтын тапкыла.
3. Негиздери 20 дм жана 60 дм, ал эми каптал жактары 13 дм жана 37 дм болгон трапециянын аянтын тапкыла.
4. Үч бурчтуктун медианалары аны аянттары барабар болгон алты үч бурчтукка бөлөөрүн далилдегиле.
5. Трапеция диагоналдары аркылуу төрт бөлүккө бөлүнгөн. Каптал жактарына жанаша жаткан бөлүктөрү бирдей чоңдукта болоорун далилдегиле.
6. Үч бурчтуктун негизине параллель болгон түз сызык анын аянтын тең экиге бөлөт. Ал түз сызык үч бурчтуктун каптал жактарын кандай катышта бөлөт?
7. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизинин каалаган чекитинен каптал жактарына чейинки аралыктардын суммасы негизинин учунан түшүрүлгөн бийиктигине барабар болоорун далилдегиле.
8. Тең капталдуу үч бурчтуктун ичинде жаткан каалагандай чекиттен жактарына чейинки аралыктардын суммасы анын бийиктигине барабар болоорун далилдегиле.
9. Айлананын радиусу R ге барабар. Сырттан (ичтен) сызылган тең жактуу үч бурчтуктун аянтын тапкыла.
10. Ромбдун диагоналдары m жана n болсо, анын аянты эмнеге барабар?
11. Параллелограммдын диагоналдары аны бирдей чоңдуктагы төрт үч бурчтукка бөлөөрүн далилдегиле.

12. Аянты 6 см^2 болгон үч бурчтук берилсин. Анын жактарын тең экиге бөлүп, бөлүү чекиттери удаалаш туташтырылган. Пайда болгон үч бурчтуктун жактарын дагы тең экиге бөлүп, ал чекиттерди удаалаш туташтырган. Акыркы үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

13. Квадратка сырттан сызылган тегеректин аянтынын, ага ичтен сызылган тегеректин аянтына карата катышын тапкыла.

14. Эки тегеректин аянттарынын катышы 2:3 кө барабар. Алардын айланаларынын узундуктарынын катышын тапкыла.

15. Туура үч бурчтукка сырттан сызылган жана ичтен сызылган тегеректердин аянттарынын катышын тапкыла.

16. Радиусу 36 см, ал эми бурчу 120° болгон сектордун аянтын тапкыла

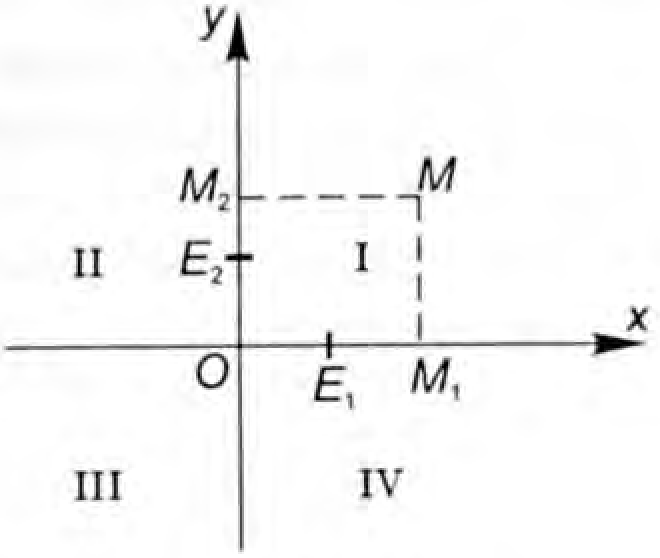
17. Радиусу r ге барабар, бурчу 60° болгон сегменттин аянтын тапкыла.

18. Радиусу R ге барабар болгон тегеректе ичтен сызылган: 1) квадраттын; 2) туура үч бурчтуктун; 3) туура алты бурчтуктун сыртында жаткан тегеректин бөлүктөрүнүн аянттарын тапкыла.

IX глава ТЕГИЗДИКТЕГИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСЫ ЖАНА ВЕКТОРЛОР

§ 43. ТЕГИЗДИКТЕГИ ЧЕКИТТИН КООРДИНАТАЛАРЫ

Тегиздикте бири-бирине перпендикулярдуу болгон жана *O* чекитинде кесилишүүчү эки окту алалы. Алардын бири горизонталдуу, экинчиси вертикалдуу болушсун. Горизонталдуу окту x аркылуу белгилеп, **абсцисса огу** деп атайбыз, ал эми вертикалдуу окту y аркылуу белгилеп, **ордината огу** деп атайбыз. Алардын багыттары тиешелүү жебелер менен көрсөтүлгөн (131-сүрөт). x жана y октору координаталар октору деп аталышат. *O* чекити координаталар башталышы деп аталат.



131-сүрөт.

Бул октор боюнча алынуучу масштаб бирдиктери бирдей болсун, аны e деп белгилейли, б. а. $OE_1=OE_2=e$ болсун. Жалпы координаталар башталышы жана масштаб бирдиги менен жабдылган перпендикулярдуу эки октун чогуусу тегиздиктеги тик бурчтуу декарттык[1] координаталар системасын же координаталык тегиздикти түзөт. Биз мындан ары жалаң гана тик бурчтуу декарттык координаталар системасынан пайдаланабыз. Ошондуктан аны xOy координаталар системасы деп кыскача белгилеп жазабыз.

Координаталар октору тегиздикти төрт бөлүккө бөлөт. Аларды чейректер деп атайбыз.

Бул координаталык системага карата тегиздиктеги ар кандай чекиттин абалын аныктайбыз.

Тегиздиктеги каалаган M чекитин алалы. Бул чекиттен координаталар окторуна MM_1 жана MM_2 перпендикулярларын

---

[1] Р. Декарт (1596–1650) француз математиги, координаталар методун негиздөөчү.

жүргүзөбүз. Анда M_1 чекити M чекитинин x огундагы проекциясы болот.

Ушундай эле M чекитинин y огундагы проекциясы M_2 чекити болот. Анда $OM_1=x\cdot e$, $OM_2=y\cdot e$ боло тургандай x, y сандарын табууга мүмкүн.

Ошентип, тегиздикте M чекити берилсе, анда алынган координаталар системасына карата, ага туура келүүчү x, y сандары табылат, алар оң же терс маанилерге ээ болушу мүмкүн.

Эми, тескерисинче, эгерде x, y сандары берилсе, анда берилген системага карата бул сандарга туура келүүчү M чекитин таба алабыз. Ал үчүн x огуна O дон баштап, e кесиндисин x жолу өлчөп коюп M_1 чекитин, ал эми y огуна ошол эле кесиндини y жолу өлчөп коюп, M_2 чекитин табабыз. M_1, M_2 чекиттеринен x, y окторуна параллель түз сызыктар жүргүзсөк, алардын кесилиши M чекитин аныктайт. Демек x, y сандары M чекитинин абалын аныктоочу сандар болушат.

Мында x саны M чекитинин абсциссасы, y — ординатасы деп аталышат. Жалпысынан, x, y сандары M чекитинин координаталары деп аталышат жана төмөндөгүдөй белгиленет (чекитти жазып, координаталарын кашаага алабыз да, арасына үтүрлүү чекит коебуз): $M(x; y)$.

Ошентип тегиздиктеги ар кандай чекитке x жана y эки санынын иреттелген чогуусу туура келет, тескерисинче, ар кандай x жана y эки саны тегиздикте бир чекитти аныктайт.

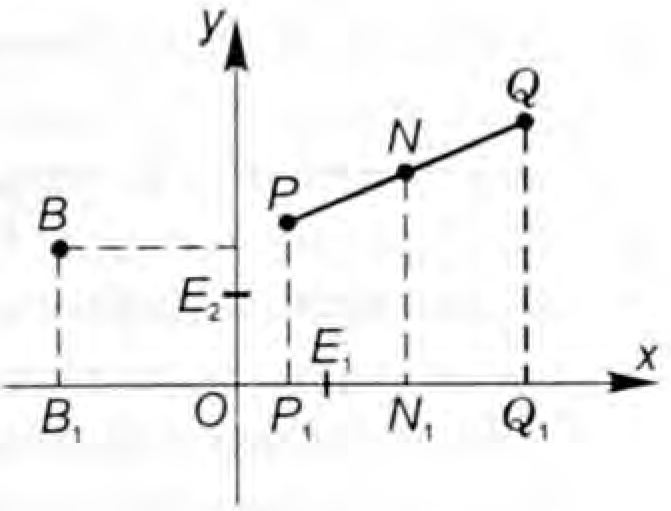
Демек, маселеде чекит берилген десе, анда анын координаталары берилген болот; ал эми чекитти табуу керек десе, анда анын координаталарын табуу керек деп түшүнөбүз.

Биз M чекитин биринчи чейректен алдык. Мында $x>0$, $y>0$ болот; II чейрек үчүн $x<0$, $y>0$; III чейрек үчүн $x<0$, $y<0$; IV чейрек үчүн $x>0$, $y<0$ болоору 131-сүрөттөн ачык көрүнүп турат. O чекитинин координаталары $x=0$, $y=0$ болоору түшүнүктүү: $O(0; 0)$.

Мисалы. Координаталар системасында $A(4; 2)$, $B(-2; 1{,}5)$, $C(2; -2)$, $D(0; 3)$ чекиттерин түзгүлө.

Чыгарылышы. $B(-2; 1{,}5)$ чекитин түзүүнү карап көрөлү. Координаталар системасын алып, каалагандай $e=OE_1=OE_2$ масштаб бирдигин белгилейбиз (132-сүрөт). x огунда O дон солду карай e ни 2 жолу, y огунда O дон жогору карай 1,5 жолу өлчөп коюп, тиешелүү түрдө B_1 жана B_2 чекиттерин табабыз. B_1 жана B_2 чекиттеринен координаталар окторуна параллель түз сызыктарды жүргүзсөк, алардын кесилиши B чекитин аныктайт. A, C, D чекиттерин да ушундай эле жол менен түзүүгө болот.

Эгерде $P(x_1; y_1)$ жана $Q(x_2; y_2)$ чекиттери берилсе, анда PQ кесиндинин ортосунда жаткан N чекитинин координаталарын таап алууга болот. Ал чекиттер 132-сүрөттөгүдөй жайланышсын деп эсептейли.



132-сүрөт.

N чекитинин координаталарын x жана y аркылуу белгилейбиз. P, Q, N чекиттеринин x огундагы проекциялары тиешелүү түрдө P_1, Q_1, N_1, болсун. Анда $OP_1=x_1$, $OQ_1=x_2$, $ON_1=x$ болоору белгилүү. Шарт боюнча $PN=NQ$ болот. Анда $PP_1 \| QQ_1 \| NN_1$ болгондуктан, берилген кесиндилерге Фалестин теоремасын колдонсок $P_1N_1=N_1Q_1$ болот. Натыйжада $P_1N_1=ON_1-OP_1=x-x_1$, $N_1Q_1=OQ_1-ON_1=x_2-x$ болот.

Бирок, P жана Q чекиттеринин берилишине карата P_1N_1, N_1Q_1 маанилери оң же терс болуп калышы мүмкүн. Ошондуктан алардын абсолюттук чоңдуктарын алабыз. Анда жогорудагы шарт боюнча $|P_1N_1|=|N_1Q_1|$ болот. Мындан $x-x_1=x_2-x$ же $x_1-x=x-x_2$ болоору белгилүү. Натыйжада $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ болот.

Ушуга окшоштуруп, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ болоорун табууга мүмкүн.

Ошентип, PQ кесиндисинин ортосундагы N чекитинин координаталары

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (1)$$

барабардыктары аркылуу аныкталат.

КӨНҮГҮҮЛӨР

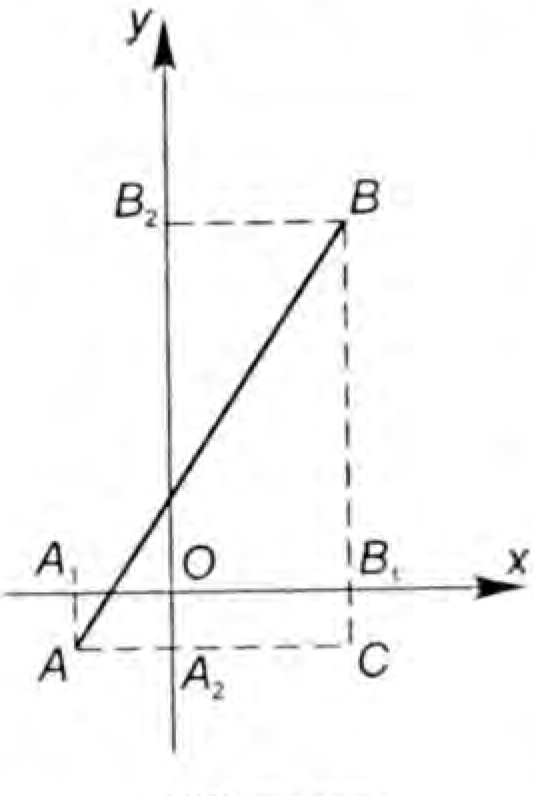
1. Эки ок боюнча тең масштаб бирдигин 1 см деп алып, төмөндөгү чекиттерди координаталар системасында түзгүлө: $A(4; 3)$, $B(-2; 5)$, $C(-3; -1)$, $D(7; -4)$, $E(-5; 0)$, $F(0; -5)$, $K(0; 0)$.
2. Жагынын узундугу 6 бирдик болгон квадраттын бир жагы абсцисса огу менен дал келет. Координаталар башталышы ал жактын ортосунда жатат. Чокуларынын координаталарын тапкыла. Квадрат — абсцисса огунун: а) жогору; б) төмөн жагында жаткан учурларын карагыла.
3. $D(3; -2)$ чекити берилген. Бул чекиттин координаталар огундагы проекциялары кандай координаталарга ээ болот?
4. Координаталар октору жана $A(-2; 3)$ чекитинен окторго түшүрүлгөн перпендикулярлар аркылуу түзүлгөн тик бурчтуктун периметрин тапкыла.

5. $A(-3;\ 4)$, $B(2;\ -2)$ чекиттери берилген. AB кесиндисинин ортосунда жаткан чекитти тапкыла.
Көрсөтмө. (1) формуладан пайдалангыла.

6. Үч бурчтуктун $A(2;\ 1)$, $B(-6;\ 7)$, $C(2;\ -2)$ чокулары берилген. Анын жактарынын ортосун тапкыла.

7. Параллелограммдын удаалаш $A(-3;\ 5)$, $B(1;\ 7)$ чокулары жана анын диагоналдарынын кесилиши $M(1;\ 1)$ берилген. Калган эки чокусун тапкыла.
Көрсөтмө. 5-маселенин чыгарылышын эске алгыла.

§ 44. ЭКИ ЧЕКИТТИН АРАЛЫГЫ



133-сүрөт.

Тегиздиктеги координаталар системасына карата $A(x_1;\ y_1)$ жана $B(x_2;\ y_2)$ чекиттери берилишсин (133-сүрөт). Алардын аралыгын координаталары боюнча аныктайбыз. A жана B чекиттеринен координаталар окторуна перпендикулярлар түшүрүп, алардын кесилишинен C чекитин алабыз да, ABC тик бурчтуу үч бурчтугуна ээ болобуз. Анда Пифагордун теоремасы боюнча

$$AB^2=AC^2+CB^2.$$

Бирок, $AC=A_1B_1=|x_2-x_1|$, $CB=A_2B_2=|y_2-y_1|$ болоору белгилүү. Анда

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \qquad (1)$$

болот. Эгерде координаталар башталышы $O(0;\ 0)$ дон $M(x;\ y)$ чекитине чейинки аралыкты табуу талап кылынса, анда (1) формула төмөндөгүдөй жазылат:

$$OM^2=x^2+y^2 \qquad (2)$$

Мисал. $A(-4;\ 5)$ жана $B(1;\ -7)$ чекиттеринин аралыгын тапкыла.

Чыгарылышы. Изделүүчү аралык (1) формула менен эсептелет: $x_1=-4$, $y_1=5$, $x_2=1$, $y_2=-7$ болгондуктан, $AB^2=(1+4)^2+(-7-5)^2=169$, $AB=13$ сызыктуу бирдик.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. xOy системасы берилген: а) $A(-1;\ 4)$ жана $B(5;\ -4)$; б) $C(3;\ 8)$ жана $D(-1;\ 5)$ чекиттеринин арасындагы аралыкты тапкыла.

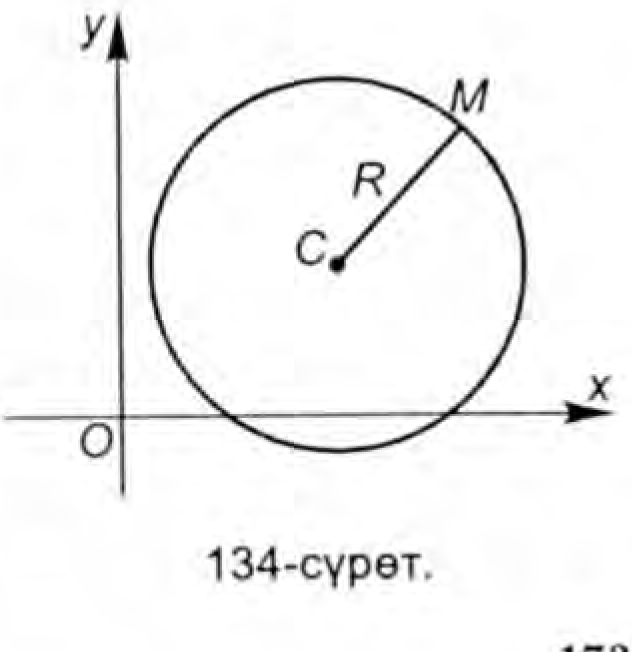
2. Координаталар башталышынан $M(-4; 3)$ чекитине чейинки аралыкты тапкыла.
3. $K(5; -3)$ жана $L(-1; 0)$ чекиттери менен чектелген кесиндинин узундугун тапкыла.
4. $A(2; -3)$, $B(-4; 1)$ жана $C(1; -1)$ чекиттери берилген. Бул үч чекит бир түз сызыкта жатабы?
   Көрсөтмө. Аралыктарын таап салыштыргыла: $AC+CB=AB$.
5. Үч бурчтуктун чокулары $A(2; 1)$, $B(-6; 7)$ жана $C(2; -2)$ берилген. Үч бурчтуктун периметрин жана медианаларын тапкыла.
   Көрсөтмө. Медианаларды аныктоо үчүн үч бурчтуктун жактарынын ортосундагы чекиттерди тапкыла.
6. Чокулары $A(2; 3)$, $B(-1; -1)$, $C(3; -4)$ болгон үч бурчтуктун тең капталдуу экендигин далилдегиле.
   Көрсөтмө. Жактарынын узундуктарын салыштыргыла.
7. $A(4; -6)$ чекитинен 5 бирдик аралыкта жатуучу ордината огундагы чекитти тапкыла.
8. Чокулары $A(0; 1)$, $B(4; 3)$, $C(5; 1)$ жана $D(1; -1)$ чекиттеринде жаткан төрт бурчтук тик бурчтук болоорун далилдегиле.
   Көрсөтмө. Жактарынын жана диагоналдарынын узундуктарын салыштыргыла.
9. Чокулары $E(-2; 0)$, $F(2; 2)$, $M(4; -2)$ жана $N(0; -4)$ чекиттеринде жаткан төрт бурчтук квадрат экендигин далилдегиле.

§ 45. АЙЛАНАНЫН ТЕҢДЕМЕСИ

Сызыктын бардык чекиттеринин координаталары кандайдыр бир теңдемени канааттандырса, анда ал теңдеме ошол сызыктын (айлананын) теңдемеси деп аталат.

Жалпы учурда $F(x; y)=0$ түрүндө жазылат, мында F дегенибиз x жана y аркылуу аткарылуучу амалдарды аныктайт.

xOy системасына карата радиусу R ге барабар болгон жана борбору $C(a; b)$ чекитинде жаткан айлана берилсин (134-сүрөт). Ал айлананын теңдемесин түзөбүз. Ушул максатта айлананын каалаган жеринен $M(x; y)$ чекитин белилейбиз.



134-сүрөт.

Бул айлананы $C(a; b)$ борбордон R аралыкта жаткан чекиттердин геометриялык орду (көптүгү) деп кароого болот. Ошондуктан $CM=R$ же $CM^2=R^2$ деп алабыз. Анда эки чекиттин аралыгын аныктоо формуласы боюнча

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (1)$$

ка ээ болобуз. Бул берилген айлананын теңдемеси болот, анткени айлананын ар кандай чекитинин координаталары (1) теңдемени канааттандырат. Эгерде $C(a;\ b)$ борбору координаталар башталышы менен дал келип калса, анда $a=0$, $b=0$ болуп калат. Анда (1) ден төмөндөгүнү алабыз:

$$x^2+y^2=R^2 \quad (2)$$

Бул борбору координаталар башталышында жатуучу, радиусу R ге барабар болгон айлананын теңдемеси.

Мисал. Борбору $C(4;\ -2)$ чекитинде жатуучу жана радиусу 3 кө барабар болгон айлананын теңдемесин жазгыла. Ал айлана $A(-1;\ 5)$ чекити аркылуу өтөбү?

Чыгарылышы. Маселеде берилгендер боюнча $a=4$, $b=-2$, $R=3$. Демек (1) теңдеме боюнча $(x-4)^2+(y+2)^2=9$ болот. Бул изделүүчү айлананын теңдемеси. Айлана $A(-1;\ 5)$ чекити аркылуу өтө тургандыгын текшерүү үчүн айлананын теңдемесиндеги x, y тин ордуна A чекитинин координаталарын коёбуз:

$$(-1-4)^2+(5+2)^2\neq 9.$$

Демек, берилген айлана A чекити аркылуу өтпөйт.

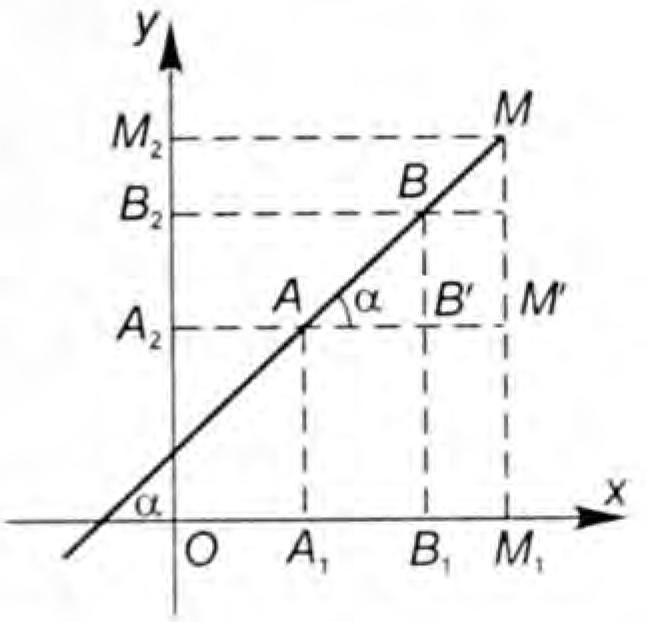
КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Борбору O жана радиусу $R=5$ болгон айлананын теңдемесин түзгүлө.
2. Айлана $x^2+y^2=16$ теңдемеси менен берилген. Радиусун тапкыла жана айлананы xOy системасында сызгыла.
3. O дон 1,5 аралыкта жаткан чекиттердин геометриялык ордунун теңдемесин түзгүлө. Чиймеде көрсөткүлө.
4. $A(3;\ -4)$, $B(10;\ 3)$, $C(-1;\ 3)$, $D(0;\ 5)$ чекиттеринин кайсынысы $x^2+y^2-25=0$ теңдемеси менен берилген айланада жатат?
5. $x^2+y^2-64=0$ айланасынын радиусун тапкыла.
6. Борбору $C(-4;\ 0)$ чекитинде жатып, радиусу 3кө барабар болгон айлананын теңдемесин түзгүлө. Аны xOy системасында сызгыла.
7. Борбору $C(2;\ -1)$ чекитинде жатып, радиусу 2ге барабар болгон айлананын теңдемесин түзгүлө. $A(2;\ -3)$ чекити ал айланада жатабы?
8*. x огун $B(3;\ 0)$ чекитинде жанып өтүүчү жана радиусу 2,5ке барабар болгон айлананын теңдемесин түзгүлө.

§ 46. ТҮЗ СЫЗЫКТЫН ТЕҢДЕМЕСИ

xOy координаталар системасында $A(x_1; y_1)$ жана $B(x_2; y_2)$ чекиттери берилсин (135-сүрөт). Бул эки чекит бир гана түз сызыкты аныктайт. Ал түз сызыктын теңдемесин түзөбүз. AB түз сызыгын координаталар окторуна параллель эмес деп эсептейли. Анда $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ боло тургандыгы түшүнүктүү.

AB түз сызыгынын x огу менен түзгөн тар бурчун α аркылуу белгилейли. Анда $AB'B$ тик бурчтуу үч бурчтугунан (§ 26).



135-сүрөт.

$$tg\alpha = \frac{B'B}{AB'} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (1)$$

катышын жаза алабыз. $\angle B'AB=\alpha$. (1) катыш түз сызыктын бурчтук коэффициенти деп аталат. Ал кээде $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$ деп белгиленет. AB түз сызыгынан каалагандай $M(x; y)$ чекитин алалы. $MM'A$ тик бурчтуу үч бурчтугу үчүн да

$$tg\alpha = \frac{M'M}{M'A} = \frac{M_2A_2}{M_1A_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \qquad (2)$$

катышын жазабыз. Мында M чекитин AB түз сызыгынын каалаган жеринен алсак да (2) катыш туура болот ($OM_1=x$, $OM_2=y$ экендиги эске алынды).

(1), (2) барабардыктардан

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (3)$$

деп жаза алабыз. Катыштардын барабардыгынын негизинде

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1) \qquad (3^1)$$

же

$$(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+(x_2-x_1)y_1-(y_2-y_1)x_1=0$$

болот.

Бул эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси, ал x, y өзгөрмөлөрүнө карата 1-даражада. Демек, каалагандай 1-даражадагы

$$ax+by+c=0 \qquad (4)$$

же

$$y=kx+b \qquad (5)$$

түрүндөгү теңдеме (a, b, c — берилген сандар) түз сызыктын теңдемеси болот.

Эми төмөндөгүдөй учурларды карап көрөлү.

1) AB түз сызыгы x огуна параллель болсун. Анда $y_2=y_1$ болот, б. а. $y_2-y_1=0$ болот. (3) дөн $y=y_1$ болуп калат. Демек, $y=y_1$ же жалпы учурда $y=b$ (5) теңдемеси x огуна параллель түз сызыктын теңдемеси болот.

2) AB түз сызыгы y огуна параллель болсо,

$$x=x_1 \text{ же } x=a \tag{6}$$

болот. Бул y огуна параллель түз сызыктын теңдемеси.

Мисал. $A(-3; 5)$, $B(2; -4)$ чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин түзгүлө.

Чыгарылышы. (3) теңдемени пайдалансак: $\frac{x+3}{2+3}=\frac{y-5}{-4-5}$ болот, анткени берилиши боюнча $x_1=-3$, $y_1=5$, $x_2=2$, $y_2=-4$ болот. Натыйжада $9x+5y+2=0$ болот, бул изделүүчү түз сызыктын теңдемеси. Бул теңдеме берилген эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси экендигин оңой байкоого болот. Ал үчүн берилген чекиттердин координаталары акыркы теңдемени канааттандыра тургандыгын текшерүү керек.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $A(4; -5)$ жана $B(-1; 2)$ чекиттеринен бирдей алыстыкта жаткан чекиттердин геометриялык ордунун теңдемесин түзгүлө. *Көрсөтмө.* Чекиттердин геометриялык ордуна тиешелүү чекитти өзгөрмөлүү $M(x; y)$ чекити аркылуу белгилеп, $MA=MB$ шартын колдонгула.
2. Координаталар окторунан бирдей алыстыкта жаткан чекиттердин геометриялык ордунун теңдемесин түзгүлө.
3. $A(9; -3)$ жана $B(-6; 1)$ чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин түзгүлө.
4. Үч бурчтуктун чокулары $A(-2; 2)$, $B(1; 4)$, $C(0; 0)$. Анын жактарынын жана медианаларынын теңдемелерин түзгүлө. *Көрсөтмө.* Медианалардын теңдемесин түзүүдө үч бурчтуктун жактарынын тең ортолорун таап алгыла.

5*. x огун координаталар башталышынан 4 бирдик аралыкта кесип $M(8; 5)$ чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин түзгүлө. Аны чиймеде көрсөткүлө. Маселенин канча чыгарылышы бар?

6. Түз сызык $2x-3y+6=0$ теңдемеси менен берилген. Ал түз сызык координаталар окторун координаталар башталышынан кандай кесиндилерде кесип өтөөрүн тапкыла.

7. $A(-2;\ 1)$, $B(3;\ \frac{1}{3})$, $C(0;\ 2\frac{1}{3})$, $D(1;\ 2)$ жана $E(-3\frac{1}{2};\ 0)$ чекиттери берилген. Бул чекиттердин кайсынысы $2x-3y+7=0$ теңдемеси менен берилген түз сызыкта жатат?

8. Төмөндөгү түз сызыктарды түзгүлө: $3x-2=0$, $2y+3=0$, $x+y=0$, $2x+5y=0$, $x+2y+3=0$ жана $3x+4y-12=0$.
Көрсөтмө. Түз сызыкты түзүү үчүн анын эки чекитин таап алуу жетиштүү. Мисалы, $3x+4y-12=0$ теңдемеси менен берилген түз сызыкты түзүү үчүн каалагандай эки чекитти табабыз. $x=0$ деп эсептейли, анда $3\cdot0+4y-12=0$ же $y=3$ болот, натыйжада $A(0;\ 3)$ чекити табылды. Эми $y=0$ болсун, анда $3x+4\cdot0-12=0$ же $x=4$ болот, б. а. $B(4;\ 0)$ табылды. A, B чекиттерин түзүп, алар аркылуу түз сызык сызабыз.

§ 47. ВЕКТОРЛОР

Биз физиканы, механиканы, астрономияны ж. б. илимдерди окуп-үйрөнүүдө эки түрдөгү чоңдуктарды учуратабыз, биринчиси: масса, узундук, убакыт, көлөм ж. б. Бул чоңдуктар сан мааниси менен гана аныкталат. Аларды **скалярдык**[1] чоңдуктар деп атайбыз. Экинчиси: күч, ылдамдык, ылдамдануу ж. б. Бул чоңдуктарды аныктоо үчүн жалаң гана алардын сан маанилеринин (скалярдын) берилиши жетишсиз. Мисалы, күчтүн чоңдугу берилип, бирок кайсы багытка аракет этип жаткандыгы көрсөтүлбөсө, анда анын таасирин толук аныктоого болбойт. Демек, бул чоңдуктардын сан мааниси менен кошо багыты да берилиши керек. Мындай чоңдуктар **вектордук**[2] чоңдуктар. Аны геометриялык түрдө элестетүү үчүн белгилүү узундуктагы кесиндини алып, анын учуна стрелка коюшат.

Багытталган кесинди **вектор** деп аталат. Вектор эки чоң тамга же бир кичине латын тамгасы менен белгиленет да, үстүнө стрелка коюп жазылат. Мисалы, $\overrightarrow{AB}$ же $\vec{a}$ деп белгиленет.

Эгерде вектор эки тамга менен белгиленсе, анда жазылыш тартиби боюнча алардын биринчи орунда турганы вектордун башталыш чекитин, экинчи орунда турганы акыркы чекитин көрсөтөт.

Вектор белгиленген кесиндинин узундугу же вектордун башталышындагы же акырындагы эки чекиттин аралыгы ал вектордун узундугун аныктайт. Вектордун узундугуна барабар

---

[1] Скаляр латындын *scalaris* — баскычтуу деген сөзүнөн алынган.

[2] Вектор латындын *vector* — которуу деген сөзүнөн алынган.

болгон оң сан вектордун **модулу** же абсолюттук чоңдугу деп аталат да, $|\vec{AB}|$ же AB түрүндө белгиленет.

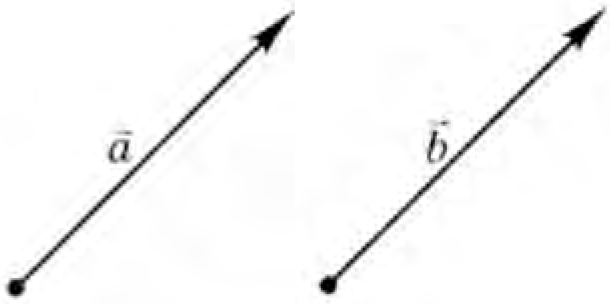
Эгерде вектор бир тамга $\vec{a}$ менен белгиленсе, анда анын узундугу $|\vec{a}|$ же $\boldsymbol{a}$ түрүндө белгиленет.

Эгерде вектордун башталыш жана акыркы чекиттери дал келип калса, анда ал **нөл** вектор деп аталат. Ал $\vec{0}$ түрүндө белгиленет. Анын узундугу нөлгө барабар, ал эми багыты аныксыз болот.

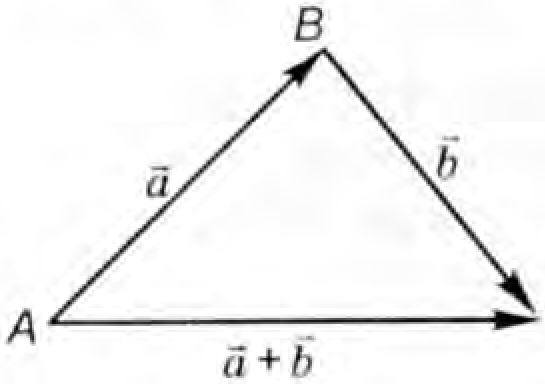
Аныктама. **Эгерде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун: 1) узундуктары барабар жана 2) багыттары бирдей болсо, анда алар барабар деп аталышат да $\vec{a}=\vec{b}$ түрүндө жазылат** (136-сүрөт).

Эгерде бул аныктамадагы эки шарттын бирөө эле аткарылбай калса, анда алар барабар болушпайт. Бул аныктаманын негизинде векторду бир орундан экинчи орунга багытын, чоңдугун өзгөртпөстөн которууга болот. Чындыгында $\vec{a}$ векторун кандайдыр A чекитине чоңдугун жана багытын өзгөртпөй которсок, $\vec{AB}$ векторун алабыз (137-сүрөт). Бирок алар аныктаманын шартын канааттандыргандыктан $\vec{a}=\vec{AB}$ болот.

Эгерде вектордун узундугу бирге барабар болсо, анда ал **бирдик** вектор деп аталат. $\vec{e}$ бирдик вектор болсо, $|\vec{e}|=1$ болот.



136-сүрөт.



137-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $\vec{a}$ жана C чекити берилген. $\vec{CD}=\vec{a}$ векторун түзгүлө.
2. Квадрат берилген. Жактары боюнча барабар векторлорду белгилеп көрсөткүлө (чиймеде).
3. $ABCD$ параллелограммынын жактары боюнча $\vec{AB}=\vec{a}$ жана $\vec{BC}=\vec{b}$ векторлору берилген. а) $\vec{DC}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$ болоорун далилдегиле; б) $\vec{CD}$ жана $\vec{a}$, $\vec{BC}$ жана $\vec{DA}$ векторлору барабар болушабы?
4. $ABCDEF$ туура алты бурчтугу берилген. Жактары боюнча барабар векторлорду көрсөткүлө. $\vec{AB}=\vec{p}$, $\vec{BC}=\vec{q}$, $\vec{CD}=\vec{m}$ болсо, $\vec{AF}$, $\vec{EF}$, $\vec{ED}$ векторлорун тапкыла.

5. Эгерде 4-маселедеги алты бурчтукка сырттан сызылган айлананын диаметри 6 см болсо, $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{m}$ векторлорунун модулун тапкыла.

§ 48. ВЕКТОРЛОР МЕНЕН АТКАРЫЛУУЧУ АМАЛДАР

48.1. ВЕКТОРЛОРДУН СУММАСЫ

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору берилсин. Бул эки вектордун суммасын табабыз. Ал үчүн $\vec{a}$ векторунун чоңдугун жана багытын өзгөртпөстөн, эркибизче алынган A чекитине которобуз (137-сүрөт). Анда $\vec{a}=\vec{AB}$ болот. Андан кийин $\vec{b}$ векторун башталыш чекити B чекитине дал келгендей кылып, багытын өзгөртпөстөн которобуз. Анда $\vec{b}=\vec{BC}$ болот. $\vec{a}$ векторунун A башталыш чекитин $\vec{b}$ векторунун акыркы чекити C менен туташтырсак, $\vec{AC}$ вектору берилген эки вектордун суммасын аныктайт:

$$\vec{AC}=\vec{a}+\vec{b}\ .$$

Мындай жол менен каалаган сандагы векторлордун суммасын табууга болот.

Эгерде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун узундуктары бирдей болуп, бирок карама-каршы багытта болушса, анда алар **карама-каршы векторлор** деп аталышат. Карама-каршы векторлорду белгилөө үчүн вектордун алдына «минус» белгиси коюлат. Мисалы, $-\vec{a}$ вектору $\vec{a}$ векторуна карама-каршы вектор болот.

Векторлорду кошуунун төмөндөгүдөй касиеттери бар:

1. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$,

2. $\vec{a}+(-\vec{a})=0$,

3. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (векторлордун суммасы коммутативдик законго баш ийет).

4. Векторлордун суммасы ассоциативдик законго баш ийет:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

48.2. ВЕКТОРЛОРДУН АЙЫРМАСЫ

Эми векторлордун айырмасын карап көрөлү.

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун айырмасы $\vec{a}-\vec{b}$ деп, $\vec{b}$ векторуна кошкондо $\vec{a}$ векторун берүүчү $\vec{u}$ векторун айтабыз.

Ал төмөндөгүдөй жазылат:

$$\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}\ ,$$

мында

$$\vec{a}=\vec{b}+\vec{u}$$

болот.

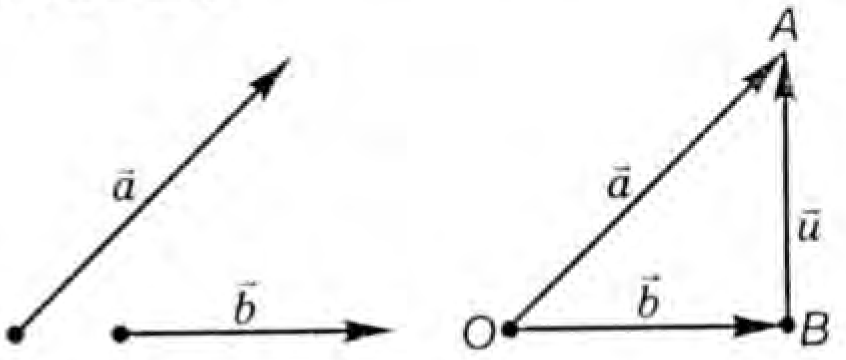
Берилген эки вектордун айырмасын чиймеде көрсөтүш үчүн, берилген $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорун каалагандай O чекитине багытын жана чоңдугун өзгөртпөстөн которобуз. Анда $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ болот (138-сүрөт).

Кемитүүчү $\vec{b}$ векторунун акыркы B чекитин кемүүчү $\vec{a}$ векторунун акыркы A чекитине туташтырып, $\overrightarrow{BA}$ векторуна ээ болобуз. Ал берилген эки вектордун айырмасын аныктайт. Чындыгында

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$$

$$\vec{b}+\vec{u}=\vec{a},$$

$$\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}.$$



138-сүрөт.

48.3. ВЕКТОРДУ САНГА КӨБӨЙТҮҮ

$\vec{a}$ вектору берилсин. Эгерде $\vec{a}$ векторун үч жолу кошсок, кандайдыр $\vec{b}$ векторун алабыз ($139^{а}$-сүрөт).

Бул акыркы барабардыкты $\vec{b}=\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$, $\vec{b}=3\,\vec{a}$ деп жазууга болот. Демек, $\vec{a}$ векторун 3 санына көбөйтүп, $\vec{b}$ векторун алдык. Мында $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ болуп, ал векторлор бир түз сызыкта жатышат жана багыттары бирдей, $\vec{b}$ векторунун узундугу $\vec{a}$ векторунунун узундугунан 3 эсе чоң.

Эми $-\vec{a}$ векторун эки жолу кошобуз (мында $-\vec{a}$ вектору $\vec{a}$ векторуна карама-каршы экендиги белгилүү). Натыйжада, $\vec{b}$ векторун алабыз ($139^{б}$-сүрөт), б. а.

$$\vec{b}_1=(-\vec{a}\,)+(-\vec{a}\,).$$

а)

б)

139-сүрөт.

Муну $\vec{b}_1=2(-\vec{a})=-2\vec{a}$ деп жазууга болот. Мында $\vec{OA}=\vec{a}$, $-\vec{a}_1=\overrightarrow{OA_1}$, $\vec{b}_1=\vec{OB}_1$ болуп, $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору бир түз сызыкта жатышат, алардын багыттары карама-каршы. $\vec{b}_1$ векторунун узундугу $\vec{a}$ векторунунун узундугунан $|-2|=2$ эсе чоң.

Демек, векторду санга көбөйтүү барабар векторлорду кошуу катарында каралат.

Жалпы учурда $\vec{a}$ векторун k санына көбөйтсөк, анда $\vec{b}$ векторун алабыз:

$$\vec{b}=k\cdot\vec{a} \tag{1}$$

Бирок $k>0$ болгондо $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун багыттары бирдей, $k<0$ болгондо $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун багыттары карама-каршы болот. Мында k ар кандай сан болушу мүмкүн. Эки учурда тең $\vec{b}$ векторунун чондугу $\vec{a}$ векторунун чоңдугунан $|k|$ эсе чоң болот.

Эгерде эки вектор бир түз сызыкта же параллель түз сызыктарда жатышса, анда алар **коллинеардуу** векторлор деп аталышат. Демек, (1) барабардыгын канааттандыруучу $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору коллинеардуу болушат.

Векторду санга көбөйтүү төмөндөгүдөй касиеттерге ээ:

1. $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$;

2. $k\cdot\vec{0}=\vec{0}$;

3. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;

4. $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$

5. $k\cdot(l\cdot\vec{a})=(k\cdot l)\cdot\vec{a}$;

6. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$;

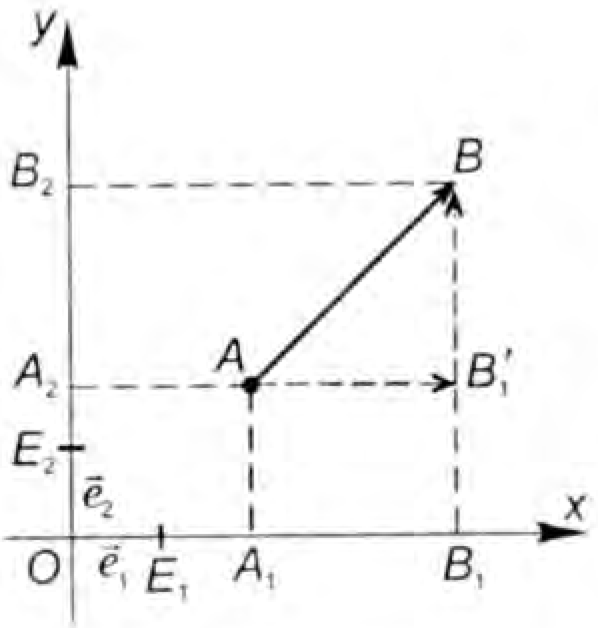
7. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; ($\vec{a}$ мында k, l сандар).

48.4. ВЕКТОРДУН КООРДИНАТАЛАРЫ

Эки векторду тегиздиктеги тик бурчтуу декарттык координаталар системасына карата карап көрөлү.

Координаталык октор боюнча багытталган $\vec{e}_1=\vec{OE}_1$ жана $\vec{e}_2=\vec{OE}_2$ бирдик векторлорун алалы, б. а. $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$ болсун (140-сүрөт).

Тегиздикте каалаган $\vec{a}$ вектору берилсин. Бул вектордун x огундагы проекциясы A_1B_1, ал эми y огундагы проекциясы A_2B_2 болсун: $a_1=A_1B_1$, $a_2=A_2B_2$ деп белгилейли.



140-сүрөт.

$\vec{a}$ векторун $\vec{e}_1$ жана $\vec{e}_2$ бирдик векторлору боюнча жазууга болот. Эгерде A_1B_1 кесиндисин вектор катарында карасак, анда аны $\overrightarrow{A_1B_1}=a_1\cdot\vec{e}_1$ деп жазууга болот. Ошондой эле $\overrightarrow{A_2B_2}=a_2\cdot\vec{e}_2$ болоору түшүнүктүү, Бирок векторлорду кошуу эрежеси боюнча $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB_1'}+\overrightarrow{B_1'B}$. Ошону менен катар $\overrightarrow{AB_1'}=\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1'B}=\overrightarrow{A_2B_2}$ болгондуктан,

$$\vec{a}=a_1\cdot\vec{e}_1+a_2\cdot\vec{e}_2 \tag{2}$$

болот.

Мында a_1, a_2 сандары $\vec{a}$ векторунун координата октору боюнча координаталары деп аталышат жана төмөндөгүчө белгиленет:

$$\vec{a}=(a_1;\ a_2) \tag{3}$$

a_1 саны $\vec{a}$ векторунун абсциссасы, a_2 — анын ординатасы болот.

Эгерде xOy координаталар системасына карата $\vec{a}$ векторунун баштапкы жана акыркы чекиттеринин координаталары берилсе, анда ал вектордун координаталарын табууга болот. $A(x_1; y_1)$ жана $B(x_2; y_2)$ берилсин. $A_1B_1=x_2-x_1$, $A_2B_2=y_2-y_1$ болоору белгилүү.

Анда

$$a_1=x_2-x_1,\ a_2=y_2-y_1 \tag{4}$$

б. а.

$$a=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,;\ y_2-y_1,) \tag{5}$$

xOy координаталар системасына карата $M(x; y)$ чекити берилсе, ал чекиттин координаталары $\overrightarrow{OM}$ векторунун координаталары да боло алат. $\overrightarrow{OM}$ векторун (5) формула аркылуу жазсак,

$$\overrightarrow{OM}=(x;\ y) \tag{6}$$

Бул учурда $\overrightarrow{OM}$ векторун радиус-вектору деп да аташат.

Эгерде xOy координаталар системасына карата $\vec{a}=(a_1; a_2)$, $\vec{b}=(a_1; a_2)$ векторлору берилишсе, анда $a_1=b_1$ жана $a_2=b_2$ болгондо гана $\vec{a}=\vec{b}$ болот, ошондой эле бул эки вектордун суммасы (айырмасы) координаталары аркылуу төмөндөгүдөй жазылат: $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;\ a_2\pm b_2)$. Ошондой эле $k\cdot\vec{a}=(kx_1; ky_1)$, мында k — сан.

Мисал. $A(-3; 7)$ жана $B(1; 4)$ чекиттери берилген. $\vec{AB}$ векторунун координаталарын табуу талап кылынсын.

Чыгарылышы. $x_1=-3$, $y_1=7$, $x_2=1$, $y_2=4$. (4), (5) формулаларынан пайдаланып: $a_1=4$; $a_2=-3$ же $\vec{AB}=(4; -3)$ экендигин табабыз.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $ABCD$ параллелограммынын жактары боюнча $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$ векторлору берилген. а) $\vec{BC}=\vec{b}$, $\vec{DC}=\vec{a}$ экендигин көрсөткүлө; б) $\vec{AC}$ жана $\vec{BD}$ векторлорун $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору аркылуу туюнткула.
2. $\vec{a}$ берилген. а) $3\vec{a}$; б) $-2\vec{a}$; в) $2,5\vec{a}$ векторлорун чиймеде көрсөткүлө.
3. $ABCDEF$ туура алты бурчтугунун жанаша жаткан жактары боюнча $\vec{AB}=\vec{p}$ жана $\vec{AF}=\vec{q}$ векторлору белгиленген. $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DE}$, $\vec{EF}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ векторлорун $\vec{p}$ жана $\vec{q}$ векторлору аркылуу туюнткула.
4. xOy координаталар системасында $A(2; -3)$, $B(-1; 4)$ чекиттери берилген. $\vec{AB}$ векторунун координаталарын тапкыла.
5. $\vec{a}=(2; 5)$ берилген: а) $3\vec{a}$; б) $-2,5\vec{a}$ векторлорунун координаталарын тапкыла.
6. $A(-1; -3)$, $B(4; -2)$, $C(1; -4)$, $D(-2; 3)$ чекиттери берилген. Төмөндөгүлөрдү тапкыла: а) $\vec{AB}+\vec{BC}$; б) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}$; в) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA}$; г) $2\vec{AB}-\vec{BC}$.
7. Эгерде $\vec{AB}=(4; -5)$ векторунун башталыш чекити $A(1; 2)$ берилсе, акыркы B чекитинин координаталарын тапкыла.
8. $\vec{a}=(-3; 4)$ вектору берилген. а) $\vec{a}$ векторунун узундугун; б) $-\vec{a}$ векторунун координатасын тапкыла.
9. $\vec{a}=(3; -2)$, $\vec{b}=(-5; 2)$ векторлору берилген. Эгерде а) $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$; б) $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ болсо, $\vec{c}$ векторунун координаталарын эсептегиле.
10. 9-маселеде берилгендер боюнча ар бир учурдагы $\vec{c}$ векторунун модулун тапкыла.
11. Эгерде төрт бурчтуктун диагоналдары кесилишкен чекитте тең экиге бөлүнүшсө, анда ал төрт бурчтук параллелограмм болоорун далилдегиле.

    Көрсөтмө. Төрт бурчтуктун карама-каршы жактары боюнча белгиленген векторлорду диагоналдык векторлор аркылуу туюнткула.

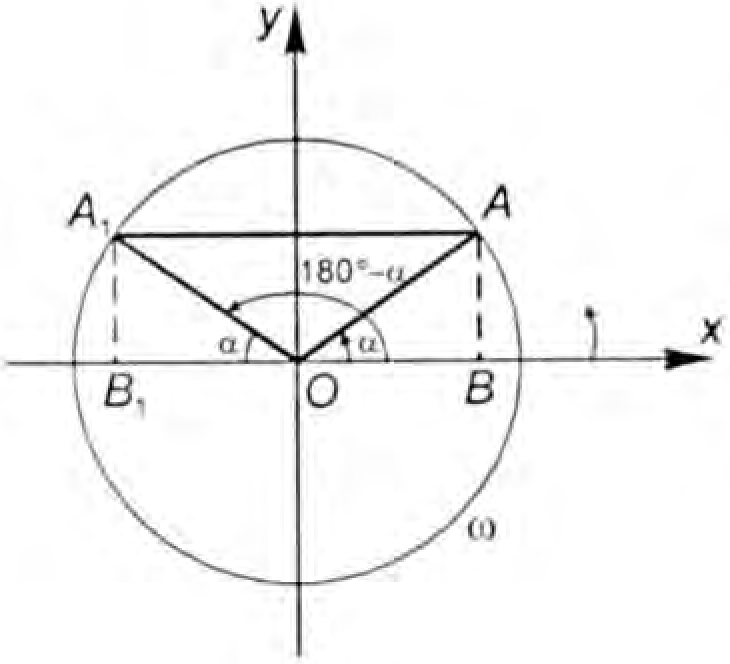
§ 49. КЕҢ БУРЧТУН ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРЫ

Биз жогоруда тик бурчтуу үч бурчтуктун жактары менен бурчтарынын арасындагы байланышты карадык. Ал тар бурчтун тригонометриялык функциялары менен байланышта болду.

Бирок, геометрияда кең бурчтуу үч бурчтуктар зор орунду ээлейт. Ошондуктан каалагандай үч бурчтуктун жактары менен бурчтарынын арасындагы байланышты аныктоо үчүн, кең бурчтун да тригонометриялык функцияларын кароого туура келет.

Ошол максатта xOy координаталар системасында $\omega(O, R)$ айланасын сызып, анын чекиттеринин координаталары аркылуу бурчтун тригонометриялык функцияларын аныктоону карайбыз.

Айланада жаткан каалаган $A(x; y)$ чекитти белгилеп алабыз. Биз Ox огунун оң багыты менен айлананын каалаган A чекитине жүргүзүлгөн радиустардын арасындагы бурчтарды карайбыз. Ox огунун оң багытынан баштап анын сааттын жебесинин айлануу багытына каршы айлануусунан пайда болгон бурчтарды оң бурчтар деп эсептөөнү шарт кылып алабыз (141-сүрөт).



141-сүрөт.

Анда 141-сүрөттөгү $OA=R$, $OB=x$, $BA=y$, $\angle BOA=\alpha$ тар бурч болсун. Биз α бурчун x огунун оң багытынан баштап A чекитине туура келүүчү OA радиусуна чейин сааттын жебесинин кыймылына каршы багытка туура келгендей кылып алдык. Анда OAB тик бурчтуу үч бурчтугунан:

$$\sin\alpha = \frac{BA}{OA} = \frac{y}{R}, \qquad (1)$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}, \qquad (2)$$

$$tg\alpha = \frac{x}{y}. \qquad (3)$$

Демек, α бурчунун тригонометриялык функцияларын ошол бурчка туура келүүчү A чекитинин координаталарына карата аныктоого мүмкүн. Мында айлананын $A(x; y)$ чекити α бурчуна туура келүүчү чекит катары каралат. Анда (1, 2, 3) барабардыктардан төмөндөгүдөй аныктамаларды айтууга болот:

1) α бурчунун синусу айланада ага туура келүүчү чекиттин ординатасынын радиуска болгон катышына барабар.

2) α бурчунун косинусу айланада ага туура келүүчү чекиттин абсциссасынын радиуска болгон катышына барабар.

3) α бурчунун тангенси айланада ага туура келүүчү чекиттин ординатасынын абсциссага болгон катышына барабар.

Бул аныктамаларды кең бурчтар, б. а. айлананын x огунун жогору жагында жаткан бөлүгү үчүн колдонуп көрөлү. Жогору жагындагы жарым айланадан $A_1(x_1; y_1)$ чекити берилип, OA_1 радиусу x огу менен $180°-\alpha$ кең бурчун түзөт деп эсептейли, б. а. $\angle BOA_1=180°-\alpha$ болсун. Анда жогорудагы үч аныктаманы колдонуп,

$$\sin(180°-\alpha)=\frac{y_1}{R} \quad (4)$$

$$\cos(180°-\alpha)=\frac{x_1}{R} \quad (5)$$

$$tg(180°-\alpha)=\frac{y_1}{x_1} \quad (6)$$

барабардыктарын жазууга болот.

Бирок, $\Delta OA_1B_1=\Delta OAB$ экендигин эске алып, $y_1=B_1A_1=BA=y$, $x_1=OB_1=-OB=-x$ деп жазууга болот. Натыйжада акыркы барабардыктардагы маанилерди (4), (5), (6) формулаларына коюп, андан кийин (1), (2), (3) барабардыктарды колдонуп, төмөндөгүнү алабыз:

$$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha; \quad (7)$$

$$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha; \quad (8)$$

$$tg(180°-\alpha)=-tg\alpha. \quad (9)$$

Демек, кең бурчтун да тригонометриялык функцияларынын маанилерин табууга болот. Ал үчүн кең бурчту жайылган бурчка толуктоочу тар бурчтун тригонометриялык функцияларынын маанилерин табуу керек.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. 1) $\alpha=0°$; 2) $\alpha=90°$; 3) $\alpha=180°$ болгондо, $\sin\alpha$ нын, $\cos\alpha$ нын маанилерин тапкыла.
2. Эгерде: а) $\alpha=0°$, $180°$ болсо, $tg\alpha$ нын мааниси эмнеге барабар?; б) $\alpha=90°$ болгондо эмне үчүн мааниге ээ болбойт?
3. Эгерде α нын маанилери: 1) 120°; 2) 135°; 3) 150° болсо, таблицаны колдонбой туруп, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ жана $ctg\alpha$ нын маанилерин тапкыла.
4. $\sin157°=\sin23°$ болоорун далилдегиле.
5. $\cos125°=-\cos55°$ болоорун далилдегиле.

6. Ар кандай α тар бурчу үчүн $tg157° = -tg23°$ болоорун далилдегиле.

7*. Таблицаны пайдаланып, а) $140°$; б) $98°30'$; в) $161{,}6°$ бурчунун синусун жана косинусун эсептегиле.

8. Таблицаны пайдаланып, а) $tg100°$; б) $tg170°28'$ маанисин эсептегиле.

9. Эгерде: а) $\cos\alpha = -0{,}8$; б) $tg\alpha = -0{,}5$ болсо, таблицаны пайдаланып, α бурчун тапкыла.

10. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ болсо, $\sin\alpha$ менен $tg\alpha$ нын маанилерин тапкыла.

§ 50. ЭКИ ВЕКТОРДУН СКАЛЯРДЫК КӨБӨЙТҮНДҮСҮ

Аныктама. **Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү векторлордун узундуктарын алардын арасындагы бурчтун косинусуна көбөйткөнгө барабар.**

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсү $\vec{a} \cdot \vec{b}$ түрүндө белгиленет.

Анда аныктаманын негизинде:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi \qquad (1)$$

Мында φ бурчу $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун арасындагы бурч, б. а.

$$\varphi = (\vec{a}, \hat{} \, \vec{b}).$$

Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн төмөндөгүдөй касиеттери бар:

1) Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү орун алмаштыруу касиетине ээ болот, б. а. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Бул касиеттин жана мындан кийинки касиеттердин тууралыгын жогорудагы аныктамага негиздеп далилдөөгө болот.

2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (скалярдык көбөйтүүнүн бөлүштүрүүчүлүк касиети).

3) $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b})$, мында k — чыныгы сан.

4) Эгерде $\vec{b} = \vec{a}$ болсо, анда $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2}$ болот.

$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2}$ туюнтмасы $\vec{a}$ векторунун **скалярдык квадраты** деп аталат. $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}|^2 \cdot \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$, мында $\varphi = (\vec{a}_1, \hat{} \, \vec{a}_2) = 0°$ демек, вектордун скалярдык квадраты, ал вектордун узундугунун квадратына барабар.

5) $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору нөл вектор болушпаса жана алар бири-бирине перпендикулярдуу болушса, анда алардын скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар болот.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, мында $\varphi=(\vec{a},\wedge\vec{b})$. $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору перпендикулярдуу, башкача айтканда $\varphi=90°$ болсо, анда

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90°=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0. \qquad (2)$$

Муну эки вектордун перпендикулярдык шарты деп айтабыз.

Натыйжа: $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0$ болот.

Себеби $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ векторлору координаталар октору боюнча багытталышкан, бири-бирине перпендикулярдуу бирдик векторлор.

Жогорудагы касиеттерден пайдаланып координаталары менен берилген эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүн эсептейбиз. $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ векторлорун алалы.

Алардын скалярдык көбөйтүндүсү

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\cdot\vec{e}_1+a_2\cdot\vec{e}_2)\cdot(b_1\cdot\vec{e}_1+b_2\cdot\vec{e}_2)=a_1\cdot b_1\cdot\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1+$$
$$+b_1\cdot a_2\cdot\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1+a_1\cdot b_2\cdot\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=a_2\cdot b_2\cdot\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$$

болот. Себеби жогорудагы касиеттердин, натыйжанын негизинде:

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1=0;\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=\vec{e}_1{}^2=1;\ |\vec{e}_1|^2=1^2=1;\ \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=1.$$

Демек,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2 \qquad (3)$$

координаталары менен берилген эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүн аныктайт.

Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү математика курсундагы бир топ теоремалардын далилденишин, маселелердин чыгарылышын жеңилдетет.

Мисал: $\vec{a}=(5;\,12)$ жана $\vec{b}=(-4;\,2)$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.

Чыгаруу: Векторлор координаталары менен берилген. Ошондуктан (3) формуладан пайдаланабыз.

Мында $a_1=5$, $a_2=12$, $b_1=-4$, $b_1=2$, анда $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ болот.

(3) формуладан:

$$|\vec{a}|^2=\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}_1^2+\vec{a}_2^2,$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}_1^2+\vec{a}_2^2} \qquad (4)$$

Бул формула аркылуу вектордун узундугу аныкталат.

(1), (3), (4) формулалардан эки вектордун арасындагы бурчтуң косинусун табууга болот:

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}. \qquad (5)$$

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=4$, $(\vec{a},\hat{}\,\vec{b})=60°$ болсо, анда $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.
2. Параллелограммдын диагоналдарынын квадраттарынын суммасы жактарынын квадраттарынын суммасына барабар экендигин далилдегиле.
   Көрсөтмө. Параллелограммдын жанаша жаткан жактарын $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлору менен белгилеп алып, диагоналдардын квадратын эсептөө керек.
3. $\vec{a}=(-3; 4)$ жана $\vec{b}=(2; 4)$ векторлору берилген. $\vec{a}$ векторунун $\vec{b}$ векторуна түшүрүлгөн проекциясын тапкыла.
4. Үч бурчтуктун чокулары $A(2; 1)$, $B(-6; 7)$, $C(2; -2)$ болсо, A бурчунун косинусун тапкыла.
   Көрсөтмө. $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ векторлорун тапкыла.
5. Тик бурчтуу үч бурчтук үчүн Пифагордун теоремасын далилдегиле.
   Көрсөтмө. Катеттери боюнча белгиленген $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорун $\vec{c}$ аркылуу туюнтуп, $\vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{c}^{\,2}=c^2$ көбөйтүндүсүн эсептегиле. a, b — катеттер, c — гипотенуза.
6. Диагоналдары өз ара перпендикулярдуу болгон параллелограмм ромб болоорун далилдегиле.
   Көрсөтмө. Параллелограммдын диагоналдык векторлорун жанаша жаткан жактары боюнча белгиленген векторлор аркылуу туюнтуп, эки вектордун перпендикулярдык шартынан пайдалангыла.
7. Эгерде параллелограммдын диагоналдары өз ара перпендикулярдуу жана барабар болушса, анда ал параллелограмм квадрат боло тургандыгын далилдегиле.
8. Эгерде үч бурчтуктун медианасы каршысындагы жакка перпендикулярдуу болсо, анда ал үч бурчтук тең капталдуу боло тургандыгын далилдегиле.
9. Эгерде үч бурчтуктун эки медианасы барабар болсо, анда үч бурчтук тең капталдуу боло тургандыгын далилдегиле.
10. Үч бурчтуктун чокулары $A(1; 4)$, $B(6; -1)$, $C(4; -3)$ чекиттеринде жатат. ABC үч бурчтугунун тик бурчтуу экендигин эки жол менен белгилегиле: а) Пифагордун теоремасына тескери теореманын негизинде; б) жактарынын бири-бирине перпендикулярдык шартынын негизинде.
11. Төрт бурчтуктун чокулары $A(-3; -2)$, $B(2; 1)$, $C(-1; 6)$, $D(-6; 3)$ чекиттеринде жатат. $ABCD$ төрт бурчтугунун квад-

рат экендигин эки жол менен далилдегиле: а) диагоналдарынын узундуктарынын барабардыгын жана перпендикулярдыгын текшерүү аркылуу; б) төрт бурчтуктун жактары менен дал келүүчү векторлордун координаталарын эсептөө аркылуу.

§ 51. КОСИНУСТАР ЖАНА СИНУСТАР ТЕОРЕМАЛАРЫ

61-теорема (косинустар теоремасы). **Ар кандай үч бурчтуктун бир жагынын квадраты калган эки жагынын квадраттарынын суммасынан ал жактардын жана алардын арасындагы бурчтун косинусунун эки эселенген көбөйтүндүсүн кемиткенге барабар.**

Далилдөө. ΔABC берилсин (142-сүрөт). A, B, C чокуларындагы бурчтары тиешелүү түрдө α, β, γ аркылуу, ал чокуларга каршы жаткан тиешелүү жактарды a, b, c аркылуу белгилейбиз. Анда үч бурчтуктун a жагына карата $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$ болоорун далилдөө талап кылынат.

Ар кандай кесиндиге багыт берип, вектор түрүндө сүрөттөп көрсөтүүгө болот. Берилген үч бурчтуктун жактарын 142-сүрөттө көрсөтүлгөндөй векторлор аркылуу туюнтабыз. Анда $\vec a=\vec b-\vec c$ болоору белгилүү. Мында $|\vec a|=a$, $|\vec b|=b$, $|\vec c|=c$ боло тургандыгы түшүнүктүү.

Эми $\vec a$ векторунун скалярдык квадратын эсептейбиз (§ 50):

$$\vec a^{\,2}=\vec a\cdot\vec a=(\vec b-\vec c)(\vec b-\vec c)=\vec b^{\,2}-2\vec b\;\vec c+\vec c^{\,2}.$$

Мында $\vec a^{\,2}=|\vec a|^2=a^2$, $\vec b^{\,2}=b^2$, $\vec c^{\,2}=c^2$, $\vec b\cdot\vec c=|\vec b|\cdot|\vec c|\cdot\cos\alpha$ болот. Натыйжада

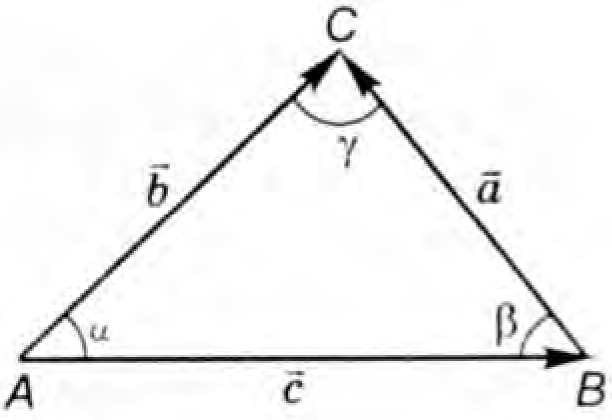
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha \qquad (1)$$

болот. Ушуга окшоштуруп

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta \qquad (2)$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma \qquad (3)$$

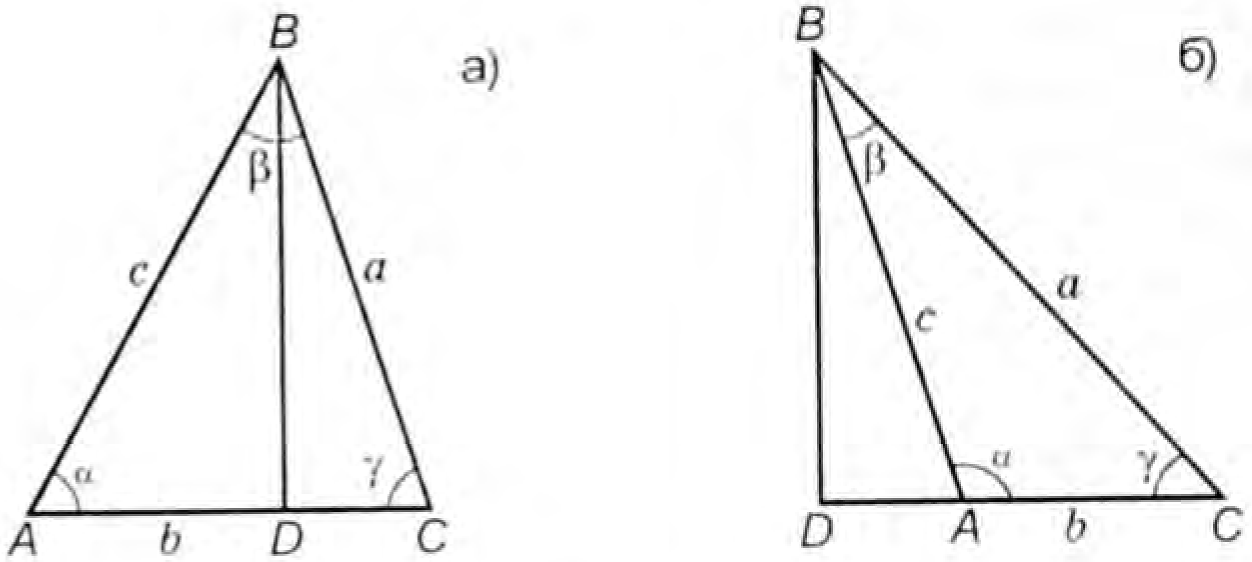
болоорун далилдөөгө болот. Теорема далилденди.



142-сүрөт.

62-теорема (синустар теоремасы). **Ар кандай үч бурчтуктун жактары ал жактарга каршы жаткан бурчтардын синустарына пропорциялаш болот.**

Далилдөө. ΔABC берилсин (143-сүрөт). Жактары жана бурчтары жогорудагыдай белгиленген.



143-сүрөт.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma} \qquad (4)$$

болоорун далилдейбиз.

AC жагына BD бийиктигин түшүрөбүз. Анда тик бурчтуу эки үч бурчтук пайда болот: ΔABD жана ΔBDC. α жана β бурчтарына карата төмөндөгүдөй учурларды карайбыз.

α — тар бурч болсун. 1) α — тар бурч болгондо ($143^{\text{а}}$-сүрөт), $BD=c\cdot\sin\alpha$; (ΔABD да)

$$BD=a\cdot\sin\gamma \ (\Delta BDC \text{ да})$$

же

$$c\cdot\sin\alpha=a\cdot\sin\gamma \qquad (x)$$

2) α — кең бурч болгондо ($143^{\text{б}}$-сүрөт) да, ΔABD га карата $BD=c\cdot\sin(180°-\alpha)=c\cdot\sin\alpha$ жана ΔBDC га карата $BD=a\cdot\sin\gamma$ болот. Бул учурда да

$$c\cdot\sin\alpha=a\cdot\sin\gamma. \qquad (y)$$

(x) жана (y) барабардыктарынан $a:\sin\alpha=c:\sin\gamma$ болот. Ушундай эле жол менен $a:\sin\alpha=b:\sin\beta$ болоорун далилдөөгө болот. Демек,

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma} \qquad (4)$$

алабыз. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Эгерде ABC үч бурчтугунда $\beta=60°$ болсо, b жагынын квадратына карата косинустар теоремасын кандай жазууга болот?

2. ABC үч бурчтугунда α бурчунун кандай маанилеринде: 1) $a^2<b^2+c^2$; 2) $a^2=b^2+c^2$; 3) $a^2>b^2+c^2$ барабарсыздыгы туура болот?

3. Эгерде:1) $a=9$, $b=11$, $\gamma=70°$; 2) $a=3$, $c=5$, $\beta=130°18'$; 3) $b=1,4$, $c=2,5$, $\alpha=35°34'$ болсо, ABC үч бурчтугунун белгисиз жагын тапкыла.
4. Эгерде ABC үч бурчтугунда $a=40$, $b=13$, $c=37$ болсо, чоң бурчун эсептегиле.
5. Параллелограммдын m жана n диагоналдары, алардын арасындагы β бурчу берилген. Параллелограммдын жактарын тапкыла.
6. Параллелограммдын a жана b жактары, бурчтарынын бири α берилген. Параллелограммдын диагоналдарын тапкыла.
7. Үч бурчтуктун жактары 6 м, 8 м жана 10 м болсо, кичине бурчунун косинусун тапкыла.
8. ABC үч бурчтугунда $b=12$ см, $\gamma=30°$, $\beta=45°$. c жагын тапкыла.
9. ABC үч бурчтугунда: 1) $a=6$ см, $b=3$ см, $\alpha=150°$ болсо, β бурчун; 2) $a=3,7$ см, $c=5,9$ см, $\gamma=23°20'$ болсо, α бурчун тапкыла.
10. Эгерде: 1) $b=110$ см, $\alpha=45°$, $\gamma=102°30'$ болсо, a жагын; 2) $c=18$ см, $\alpha=130°$, $\beta=27°16'$ болсо, b жагын тапкыла.
11. $ABCD$ параллелограммында $AB=8$ см, $AD=10$ см, $\angle BAD=50°$. Диагоналдарын эсептегиле.
12. Ромбдун жагы 46 дм, бурчу 62°. Диагоналдарын тапкыла.
13. Параллелограммдын диагоналы 12 см ге барабар болуп, анын жактары менен 18° жана 62° бурчтарды түзөт. Параллелограммдын жактарын тапкыла.
14. Трапециянын негиздери 12,6 дм жана 16,4 дм, ал эми каптал жактары 6 дм жана 8 дм. Трапециянын бурчтарын тапкыла.

§ 52. ҮЧ БУРЧТУКТАРДЫ ЧЫГАРУУ

Үч бурчтуктун негизги элементтери болуп үч жагы жана үч бурчу эсептелээри белгилүү. Эгерде бул алты элементтин үчөө (үч бурчунан башка) берилсе, анда үч бурчтуктун калган элементин таап алууга болот. Бул маселелер үч бурчтукту чыгаруу деп аталат. Мында геометриянын белгилүү теоремалары, түшүнүктөрү, косинустар жана синустар теоремалары колдонулат.

Үч бурчтукту чыгарууну төрт түрдүү маселелерге бөлүүгө мүмкүн.

1. Үч бурчтуктун эки жагы жана алардын арасындагы бурчу берилген. Кыскача: b, c жана α берилген, a, β, γ ны табуу керек.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$ барабардыгынан a ны, $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ барабардыгынан β ны, $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$ дан γ ны табабыз. Натыйжада маселе толук чыгарылган болот.

2. a, β, γ берилген. b, c, α ны табуу керек. Адегенде $\alpha=180^\circ-(\beta+\gamma)$ бурчун табабыз. Андан кийин синустар теоремасын колдонуп үч бурчтуктун жактарын (b менен c ны) табабыз.

3. a, b, c берилген. α, β, γ бурчтарын табуу керек. Бул бурчтардын бирин, мисалы, α ны косинстар теоремасын колдонуп табабыз. Экинчи бурчун (β ны) табууда синустар же косинустар теоремасын колдонууга болот. Ал эми үчүнчү бурчу $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$ барабардыгынан аныкталат.

4. a, b жана α (же β) берилген. c жагын, β (же α), γ бурчтарын табуу керек.

Адегенде синустар теоремасын колдонуп β бурчун табабыз. $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$ болот. Синустар теоремасын колдонуп c ны табабыз.

5. Үч бурчтуктун ар кандай бурчунун биссектрисасы ал бурчтун каршысында жаткан жакты жанаша жаткан жактарга пропорциялаш бөлүктөргө бөлөт, б. а. $143^{б}$-сүрөттөгү BA ны биссектриса деп эсептесек, анда $BD:BC=DA:AC$ болоорун синустар теоремасынын негизинде далилдегиле.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Үч бурчтуктун эки жагы жана алардын арасындагы бурчу боюнча үчүнчү жагын жана калган эки бурчун тапкыла:
1) $a=8,\ b=15,\ \gamma=120^\circ$; 3) $a=150,\ c=181{,}5,\ \beta=80{,}5^\circ$;
2) $b=10{,}8,\ c=16,\ \alpha=76^\circ40'$; 4) $a=4{,}5,\ b=7{,}6,\ \gamma=140^\circ12'$.

2. Үч бурчтуктун бир жагы жана ага жанаша жаткан эки бурчу берилген. Калган эки жагын жана үчүнчү бурчун тапкыла.
1) $b=30,\ \alpha=50^\circ,\ \gamma=45^\circ$; 3) $c=5{,}6,\ \alpha=29^\circ,\ \beta=110^\circ$;
2) $a=14{,}8,\ \beta=110^\circ,\ \gamma=30^\circ46'$; 4) $b=1{,}8,\ \alpha=16^\circ7',\ \gamma=61^\circ7'$.

3. Үч бурчтуктун үч жагы берилген. Үч бурчун тапкыла.
1) $a=4,\ b=6,\ c=7{,}5$; 3) $a=0{,}6,\ b=1{,}4,\ c=1{,}2$;
2) $a=101,\ b=98{,}7,\ c=15$; 4) $a=12{,}4,\ b=8,\ c=12{,}4$.

4. Үч бурчтуктун эки жагы жана алардын биринин каршысында жаткан бурчу берилген. Үчүнчү жагын жана калган эки бурчун эсептегиле.
1) $b=8,\ c=10,\ \beta=45^\circ$; 4) $a=11{,}5,\ b=25{,}6,\ \beta=80^\circ17'$;
2) $b=4{,}9,\ c=6{,}5,\ \gamma=101^\circ7'$; 5) $a=12,\ c=16,\ \alpha=11^\circ$;
3) $a=100,\ b=80,\ \alpha=120^\circ$; 6) $a=1{,}3,\ b=2{,}4,\ \gamma=7{,}5^\circ$.

5. ABC үч бурчтугунда $\alpha=70^\circ, \beta=50^\circ, \gamma=60^\circ$. Бул үч бурчтуктун эң чоң жагын жана эң кичине жагын аныктагыла.

6. ABC үч бурчтугунда $a=10{,}2$ дм; $b=17$ дм жана $c=8{,}5$ дм. Анын кайсы бурчу эң чоң жана кайсы бурчу эң кичине?

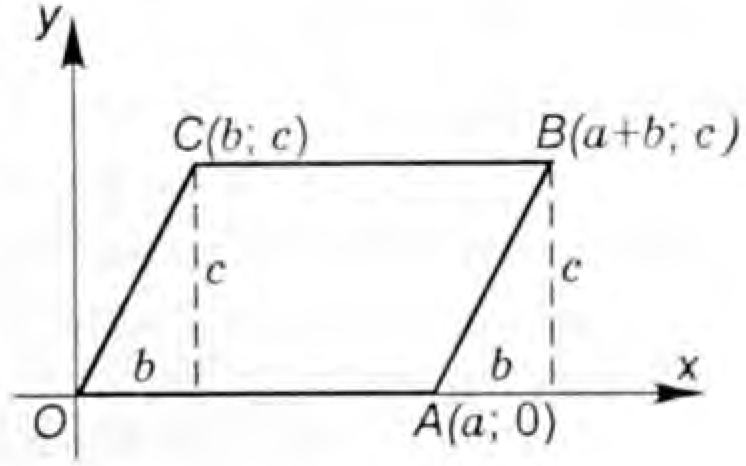
§ 53. КООРДИНАТАЛАР МЕТОДУНУН ЖАНА ВЕКТОРЛОРДУН КОЛДОНУЛУШУ

Биз жогоруда тегиздиктеги координаталар системасына карата сызыктардын теңдемелерин түзүүнү карадык. Демек, геометрия менен алгебранын байланышын көрсөттүк. Алгебралык тилде баяндалган геометрия аналитикалык геометрияны аныктайт. Анын негизги идеясы болуп координаталар методу эсептелет. Мында координаталар методун пайдаланып фигуралардын абалын, касиеттерин окуп-үйрөнүү каралат. Ал эми координаталар методу болсо, берилген координаталар системасына карата иреттелген сандардын жардамы менен чекиттердин абалын аныктоодон турат. Бул методго ылайык ар кандай геометриялык фигура чекиттердин көптүгүнөн турат.

Координаталар методун жана векторлор жөнүндөгү маалыматтарды пайдалануу, геометриядагы айрым теоремалардын далилдөөлөрүн жана маселелердин чыгарылыштарын бир кыйла жеңилдетишет. Аларды пайдаланууда координаталар системасын жана векторлорду каралуучу маселеге ылайыктуу кылып тандап алуу зарыл.

63-теорема. **Параллелограммдын жактарынын узундуктарынын квадраттарынын суммасы диагоналдарынын узундуктарынын квадраттарынын суммасына барабар.**

Далилдөө. Координаталар башталышы параллелограммдын бир чокусунда, абсцисса огу анын бир жагында жаткандай кылып координаталар системасын тандап алабыз (144-сүрөт). $OA=a$ деп белгилесек, анда $A(a; 0)$ болот. C чокусунун координаталары b жана c болсун: $C(b; c)$. Анда B чокусунун координаталары $a+b$ жана c болоору түшүнүктүү: $B(a+b; c)$.



144-сүрөт.

Эми $OABC$ параллелограммынын жактарынын жана диагоналдарынын узундуктарынын квадраттарын эсептеп, теореманын шартын канааттандыра тургандыгын текшеребиз. Жактарынын узундуктарынын квадраттарын эсептейбиз:

$$OA^2=a^2, AB^2=(a+b-a)^2+(c-0)^2=b^2+c^2, \ BC^2=a^2, OC^2=b^2+c^2.$$

Анда

$$OA^2+AB^2+BC^2+OC^2=2a^2+2b^2+2c^2 \qquad (1)$$

болот. Эми диагоналдарынын узундуктарынын квадраттарын эсептейбиз:

$$OB^2=a^2+2ab+b^2+c^2,$$

$$AC^2=b^2-2ab+a^2+c^2.$$

Анда

$$OB^2+AC^2=2a^2+2b^2+2c^2 \qquad (2)$$

болот. (1) менен (2) ни салыштырып, $OA^2+AB^2+BC^2+OC^2=OB^2+AC^2$ ка ээ болобуз. Теорема далилденди.

64-теорема. **Үч бурчтуктун орто сызыгы негизине параллель жана анын жарымына барабар.**

Далилдөө. Бул теорема мурда далилденген, азыр векторлорду колдонуп далилдейбиз. ABC үч бурчтугу берилсин (145-сүрөт). EF — анын орто сызыгы. $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{AC}$, $\vec{EF}$, векторлорду белгилейбиз.

$$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC} \qquad (3)$$

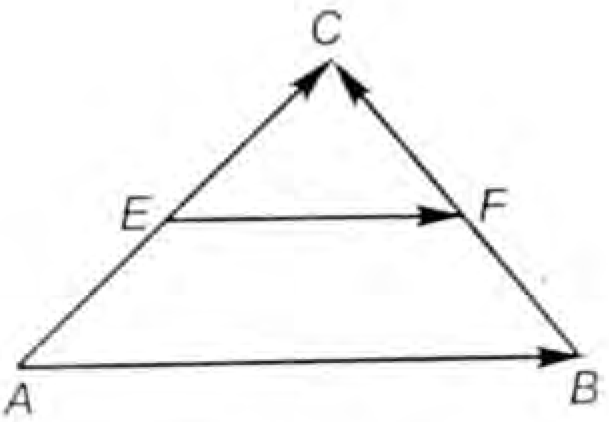
жана

$$\vec{EC}=\vec{EF}+\vec{FC} \qquad (4)$$

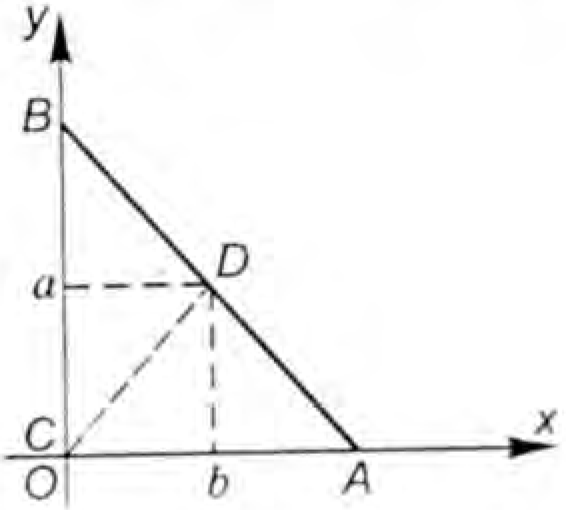
болот. Мында $\vec{EC}=\frac{1}{2}\vec{AC}$, $\vec{FC}=\frac{1}{2}\vec{BC}$ болоору түшүнүктүү. Анда (4) дөн $\frac{1}{2}\vec{AC}=\vec{EF}+\frac{1}{2}\vec{BC}$ болот. Эми (3) барабардыкты пайдалансак $\vec{EF}=\frac{1}{2}\vec{AB}$ болот. Векторду санга көбөйтүүнүн негизинде $2\vec{EF}=\vec{AB}$. Ал эми $\vec{EF}$ жана $\vec{AB}$ векторлору бирдей багытталгандыктан $EF=\frac{1}{2}AB$ болот. Теорема далилденди.

1-маселе. Координаталар методун пайдаланып, тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасынын ортосунда жаткан чекит чокуларынан бирдей алыстыкта болоорун далилдегиле.

Чыгаруу. ABC тик бурчтуу үч бурчтугу берилсин (146-сүрөт). Катеттери a, b болсун. C тик бурчунун чокусу координа-



145-сүрөт.



146-сүрөт.

талар башталышы O менен, катеттери x, y октору менен дал келсин. D чекити AB гипотенузасынын ортосунда жатсын. $A(b; 0)$, $B(0; a)$ болот. § 44 тын негизинде $D(\frac{b}{2}; \frac{a}{2})$ болот.

Эми эки чекиттин арасындагы аралыкты аныктоо формуласын колдонуп, $AD=DB=OD$ экендигине толук ишенүүгө болот.

2-маселе. Векторлордун жардамы менен ромбдун диагоналдары перпендикуляр болоорун далилдегиле.

Чыгаруу. $ABCD$ ромб болсун (147-сүрөт). $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AC}$, $\vec{BD}$ векторлорун белгилейбиз. Мында AC, BD диагоналдарынын перпендикулярдуулугун көрсөтүү үчүн $\vec{AC}\cdot\vec{BD}=0$ (алардын скалярдык көбөйтүндүсү нөл) болоорун далилдөө (§ 51. 5-касиет) жетиштүү болот.

$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}$, $\vec{BD}=\vec{AD}-\vec{AB}$ боло тургандыгы белгилүү. Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн касиеттерин, ромбдун жактарынын барабардыгын эске алсак,

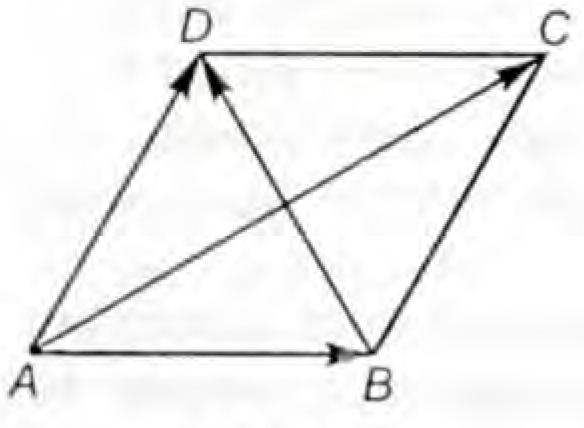
$$\vec{AC}\cdot\vec{BD}=(\vec{AB}+\vec{AD})\cdot(\vec{AD}-\vec{AB})=\vec{AD}^2-\vec{AB}^2=0$$

болот, б. а. $\vec{AC}\cdot\vec{BD}=0$. Демек, $\vec{AC}\perp\vec{BD}$, мындан $AC\perp BD$ болот. Маселе чыгарылды.

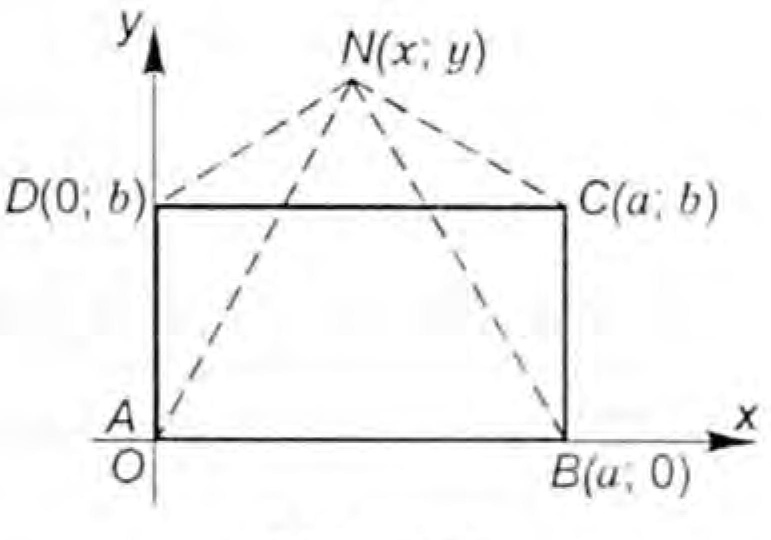
3-маселе. $ABCD$ тик бурчтугу берилген. Каалагандай N чекити үчүн $AN^2+CN^2=BN^2+DN^2$ болоорун далилдегиле.

Далилдөө. Координаталар системасынын башталышы берилген. Аны $ABCD$ тик бурчтугунун бир чокусу менен дал келгендей, ал эми координаталар октору анын жактары менен дал келгендей кылып тандап алабыз (148-сүрөт). A чокусу координаталар башталышы O менен дал келсин. Анда $A(0; 0)$ болот. Ox огу AB жагы менен дал келсин. $AB=a$ деп эсептейли. Анда B чокусунун координаталары $B(a; 0)$ болот.

AD жагы Oy огунда жатсын. $AD=b$ деп белгилейли. D чокусу Oy огунда жаткандыктан, анын координаталарын $D(0; b)$ деп



147-сүрөт.



148-сүрөт.

жаза алабыз. Эми C чокусунун координаталары оңой аныкталат: $C(a; b)$.

Тегиздиктеги каалагандай N чекитин бул координаталар системасына карата $N(x; y)$ деп жаза алабыз. Эми маселенин шартын канааттандыруучу аралыктардын квадраттарын эсептеп, салыштырабыз:

$$AN^2=x^2+y^2,\ NC^2=(x-a)^2+(y-b)^2,\ NB^2=(x-a)^2+y^2,\ DN^2=x^2+(y-b)^2.$$

Бул табылган маанилерди салыштырып

$$AN^2+CN^2=BN^2+DN^2$$

экендигине оңой ишенүүгө болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизи 8 дм, ал эми ал негизге жүргүзүлгөн медианасы 16 дм. Үч бурчтуктун калган медианаларын тапкыла.
2. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасынын квадраты катеттеринин квадраттарынын суммасына барабар (Пифагордун теоремасы). Далилдегиле.
3. Эгерде параллелограммдын диагоналдары барабар болсо, анда ал тик бурчтук болоорун далилдегиле.
4. Параллелограммдын диагоналдары кесилишкен чекитте тең экиге бөлүнөөрүн далилдегиле.
5. Үч бурчтук берилген. Ага сырттан сызылган айлананын борборун тапкыла.
6. Үч бурчтуктун жактары a, b, c берилген. b жагына жүргүзүлгөн медиананын узундугун тапкыла.
   Көрсөтмө. 63-теореманы пайдалангыла.
7. ABC үч бурчтугунун B бурчунун биссектрисасы BD. Эгерде: 1) $AB=10$ м, $BC=15$ м, $AC=20$ м болсо, AD жана DC кесиндилерин; 2) $AD:DC=8:5$ жана $AB=16$ м болсо BC жагын; 3) $AB:BC=2:7$ жана $DC-AD=1$ м болсо, AC жагын тапкыла.
   Көрсөтмө. ABD жана CBD үч бурчтуктарына синустар теоремасын колдонуп $AD:CD=AB:BC$ деп алгыла.
8. Тең капталдуу үч бурчтуктун бийиктиги 20 см, ал эми анын негизинин каптал жагына катышы 4:3 кө барабар. Ал үч бурчтукка ичтен сызылган айлананын радиусун аныктагыла.
9. Трапециянын орто сызыгы жөнүндөгү теореманы векторлорду колдонуп далилдегиле.
10. Трапециянын диагоналдарынын ортолорун туташтыруучу кесинди анын негиздеринин айырмасынын жарымына барабар болоорун далилдегиле.

11. Үч бурчтуктун чокулары $A(1; 1)$, $B(4; 1)$, $C(4; 5)$. Ал үч бурчтуктун бурчтарынын косинустарын тапкыла.

12. Векторлордун жардамы менен квадраттын диагоналдары өз ара бири-бирине перпендикулярдуу болоорун далилдегиле.

IX ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Тегиздиктеги чекиттердин координаталарын түшүндүрүп бергиле.
2. Координаталары берилген чекитти xOy системасында кантип түзөбүз?
3. Координаталары берилген эки чекиттин аралыгын кантип табабыз?
4. Борбору $C(a; b)$, радиусу R ге барабар айлананын теңдемесин жазгыла.
5. Борбору координаталар башталышы $O(0; 0)$чекитинде жаткан айлананын теңдемесин жазгыла.
6. Эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин жазгыла.
7. x жана y окторуна параллель түз сызыктардын теңдемелери кандай болот?
8. Кандай векторлор: а) барабар; б) параллель; в) перпендикуляр болушат?
9. Векторлордун суммасы кандай касиеттерге ээ?
10. Эки вектордун айырмасын кантип табабыз?
11. Векторду санга көбөйтүүнүн кандай касиеттери бар?
12. Кең бурчтун тригонометриялык функциялары кантип аныкталат?
13. Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүнө аныктама бергиле.
14. Вектордун координаталары кантип табылат?
15. Координаталары менен берилген эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү кантип табылат?
16. Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн кандай касиеттерин билесиңер?
17. Вектордун узундугу кантип аныкталат?
18. Косинустар теоремасын айтып бергиле.
19. Синустар теоремасын айтып бергиле.

IX ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. Диагоналдары 8 см жана 12 см болгон ромб берилген. Ромбдун диагоналдары координаталар окторунда жата тургандыгын билип, анын: а) чокуларынын координаталарын тапкыла; б) жагынын узундугун тапкыла.

2. Жактары 4 см жана 3 см болгон тик бурчтук берилген. Анын бир чокусу координаталар башталышы менен дал келип, жактары координаталар окторунда жатса: 1) чокуларынын координаталарын (тик бурчтук I чейректе жатса); 2) диагоналдарынын узундугун тапкыла. Канча учур болушу мүмкүн?

3. Узундугу 6 дм болгон AB кесиндисинин $A(3; -2)$ учу берилген. $B(-3; y)$ учунун ординатасын тапкыла.

4. $x=-2$; $y=3$ түз сызыктарын жүргүзгүлө. Алар кандай чекитте кесилишет?

5. $x^2+y^2=16$ айланасы жана $y=x$ түз сызыгы берилген. xOy системасында: а) аларды түзгүлө; б) алардын кесилишкен чекитин тапкыла.

6. $3\vec{a}$ жана $-3\vec{a}$ векторлору берилген. а) Алар кандай векторлор?; б) Узундуктары кандай? в) Алардын суммасы эмнеге барабар? г) Алардын айырмасын тапкыла.

7. Эгерде $\vec{a}=(-2; 5)$, $\vec{b}=(1; -2)$ болсо, а) $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{u}=\vec{b}-\vec{a}$; в) $\vec{m}=2\vec{a}+3\vec{b}$ векторун тапкыла.

8. Эгерде α бурчу 1) $120°$; 2) $135°$; 3) $150°$ болсо, таблицаны колдонбой туруп $\sin\alpha$ нын, $\cos\alpha$ нын жана $tg\alpha$ нын маанилерин тапкыла.

9. Стюарттын[1] теоремасын далилдегиле: ABC үч бурчтугу берилип, D чекити BC жагында (B жана C чекиттеринин арасында) жатса, анда $AB^2 \cdot DC+AC^2 \cdot BD-AD^2 \cdot BC=BC \cdot CD \cdot BD$ барабардыгы туура болот.

Көрсөтмө. Координаталар системасынын башталышын үч бурчтуктун чокусу менен, Ox огун үч бурчтуктун BC жагы менен дал келгендей кылып тандап алгыла. Ага карата A, D, C чекиттерин белгилеп, изделүүчү барабардыктагы аралыктарды эсептөө керек.

10*. ABC үч бурчтугунун жактары a, b, c берилсе, анда Стюарттын теоремасын пайдаланып, A чокусунан жүргүзүлгөн медиананын, бийиктиктин жана биссектрисанын узундуктарын табуунун формулаларын чыгаргыла.

Көрсөтмө. Изделүүчү медиананы, бийиктикти, биссектрисаны эсептөөдө теоремадагы AD кесиндисин тиешелүү түрдө медиана, бийиктик жана биссектриса катары алуу керек.

11. ABC үч бурчтугу $\omega(O; R)$ айланасына ичтен сызылган. $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$ болоорун далилдегиле.

12. Үч бурчтуктун жактары a, b, c берилген. Бийиктиктерин тапкыла.

13. Үч бурчтуктун жактары a, b, c берилген. Ал үч бурчтукка сырттан сызылган айлананын радиусун тапкыла.

14. Векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүн пайдаланып, тик бурчтуктун диагоналдары барабар экендигин далилдегиле.

15. Эгерде M чекити AB кесиндисинин ортосунда жатса, тегиздиктин каалагандай K чекити үчүн $KA^2+KB^2=2KM^2+\frac{1}{2}AB^2$ барабардыгы туура болоорун далилдегиле.

Көрсөтмө. $\vec{KA}$, $\vec{KB}$, $\vec{KM}$ жана $\vec{AB}$ векторлорун белгилеп, $\vec{KA}^2$ ты жана $\vec{KB}^2$ ты эсептегиле. Барабардыкты далилдөөнүн дагы кандай жолу бар?

---

[1] М. Стюарт (1717—1785), англиялык математик. Теоремасын 1746-ж. жарыялаган.

X *глава* ГЕОМЕРИЯЛЫК ӨЗГӨРТҮҮЛӨР. ФИГУРАЛАРДЫН ОКШОШТУГУ

§ 54. ЖЫЛДЫРУУ

Аныктама. **Эгерде F фигурасынын ар бир чекити кандайдыр бир эреженин (амалдын) жардамы менен F' фигурасынын бир гана чекитине туура келтирилсе, анда бул амалды F фигурасын F' фигурасына геометриялык өзгөртүү деп айтабыз.**

Геометриялык өзгөртүүнүн бир түрү болуп жылдыруу эсептелет. **Чекиттердин арасындагы аралык сакталгандай кылып геометриялык өзгөртүү жылдыруу деп аталат.** Демек, тегиздиктеги жылдырууда A жана B чекиттери тиешелүү түрдө A' жана B' чекиттерине чагылдырылса, анда $AB=A'B'$ болот.

Жылдыруунун аныктамасынын негизинде жылдыруу жөнүндөгү түшүнүк фигуралардын барабардыгы жөнүндөгү түшүнүккө байланыштуу экендигин байкайбыз. Чындыгында фигуралардын барабардыгын төмөндөгүдөй аныктоого болот: тегиздиктеги F жана F' фигураларынын чекиттеринин арасындагы өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк түзүлүп, F тен алынган ар бир AB кесиндиси F' деги ага тиешелүү $A'B'$ кесиндисине барабар болсо, анда F жана F' фигуралары барабар деп аталат. Демек, F' фигурасы F фигурасынан жылдыруу аркылуу алынса, анда аныктоонун негизинде алар барабар болушат, ал эми F жана F' фигуралары барабар болушса, анда алардын бирин жылдыруу аркылуу экинчисине дал келтирүүгө болот.

Ошентип, жылдырууда фигуранын формасы, өлчөмдөрү өзгөрбөйт, алардын жайланышкан орду гана өзгөрөт.

Жылдыруунун түрлөрү болуп окко карата симметрия, борбордук симметрия, чекиттин айланасында буруу жана параллель көчүрүү эсептелет. Төмөндө ал өзгөртүүлөргө токтолобуз.

54.1. ОКТУК, БОРБОРДУК СИММЕТРИЯЛАР

Аныктама. **MM' кесиндиси l түз сызыгына перпендикулярдуу болуп, ал түз сызык аркылуу тең экиге бөлүнсө, анда M жана M' чекиттери l түз сызыгына карата симметриялуу деп аталат (149-сүрөт).**

Мында l түз сызыгы M жана M' чекиттеринин симметрия огу деп аталат. Аныктаманын негизинде $M'M_0=M_0M$ болот. l огунда жаткан ар бир чекит өзү-өзүнө симметриялуу болоору түшүнүктүү. Ал түздөн-түз аныктамадан келип чыгат.

Тегиздиктин ар бир M чекитин кандайдыр l огуна карата симметриялуу кылып M' чекитине өзгөртүү **окко карата симметрия** деп аталат.

Окко карата симметрия өз ара бир маанилүү өзгөртүү болот. Анткени — тегиздиктин ар бир M чекитин, аныктаманын ар бир талабы аткарылгандай кылып, бир гана M' чекитине симметриялуу өзгөртүүгө болот. Ошондой эле, тегиздиктин ар бир M' чекитин l огуна карата симметриялуу өзгөртсөк, кайрадан бир гана M чекитине ээ болобуз.

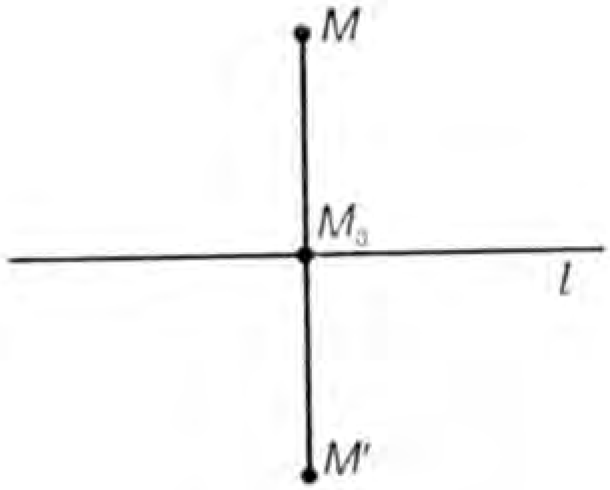
Тегиздикте кандайдыр бир l огуна карата F фигурасынын ар бир M чекитине симметриялуу болгон M' чекити табылса, анда мындай M' чекиттеринин көптүгү F' фигурасын аныктайт. Бул учурда F жана F' фигуралары l огуна карата симметриялуу деп аталат.

Окко карата симметриянын төмөндөгүдөй касиеттери бар.

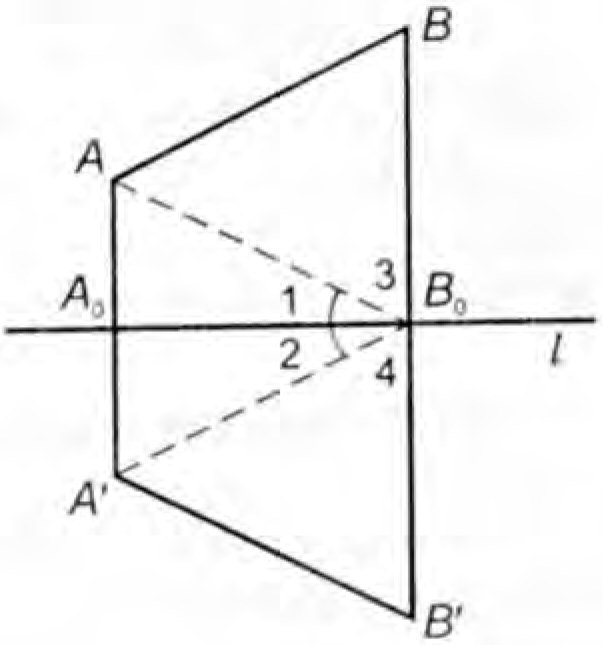
1. Окко карата симметрияда эки чекиттин аралыгы өзгөрбөйт. l огу жана анда жатпаган A жана B чекиттери берилсин (150-сүрөт). l огуна карата симметрияда A жана B чекиттери тиешелүү A' жана B' чекиттерине өтсүн. Мында $AB=AB'$ болоорун далилдейбиз.

$\Delta AA_0B_0=\Delta A'A_0B_0$ болгондуктан, $AB_0=A'B_0$, $\angle 1=\angle 2$ болот. Мындан $\angle 3=\angle 4$ келип чыгат. Натыйжада $\Delta AB_0B=\Delta A'B_0B'$ экендигине ээ болобуз. Ошентип, $AB=A'B'$ болот.

2. Окко карата симметрия — бул жылдыруу болот. Мунун тууралыгы жылдыруунун аныктамасынан жана 1-касиеттен келип чыгат.



149-сүрөт.



150-сүрөт.

3. Окко карата симметриялуу фигуралар барабар болушат. Бул ырастоо фигуралардын барабардыгынын аныктамасы жана 1-касиеттин негизинде далилденет.

Натыйжа. **Окко карата симметрияда түз сызык түз сызыкка, шоола шоолага өтөт** (чагылдырылат). Бул касиеттин тууралыгы 3-касиеттен келип чыгат.

Аныктама. **Эгерде *MM′* кесиндиси *O* чекитинде тең экиге бөлүнсө, анда *M* жана *M′* чекиттери *O* чекитине карата симметриялуу деп аталышат** (151-сүрөт).

Мында *O* чекити симметриялуу *M* жана *M′* чекиттеринин симметрия борбору болот. Аныктаманын негизинде $MO=OM'$. *O* чекити өзү-өзүнө симметриялуу (же өзү-өзүнө туура келет) деп эсептелет.

Тегиздиктин ар бир *M* чекитин *O* борборуна карата симметриялуу кылып *M′* чекитине өзгөртүү **борбордук симметрия** деп аталат.

Борбордук симметрия — бул өз ара бир маанилүү чагылдыруу болуп эсептелет. Анткени аныктаманын талабы аткарылгандай кылып тегиздиктин ар бир *M* чекитине борбордук симметриялуу болгон бир гана *M′* чекитин табууга болот. Ошондой эле, тескерисинче, *M′* чекитин *O* борборуна карата симметриялуу кылып чагылдырсак, кайрадан бир гана *M* чекитине ээ болобуз.

Эгерде тегиздикте кандайдыр *F* фигурасынын ар бир *M* чекитин берилген *O* борборуна карата симметриялуу чагылдырсак, *M′* чекитине ээ болобуз. Ал *M′* чекиттеринин көптүгү *F′* фигурасын аныктайт. Бул учурда *F* жана *F′* фигуралары *O* борборуна карата симметриялуу болушат.

Борбордук симметриянын төмөндөгүдөй касиеттери бар.

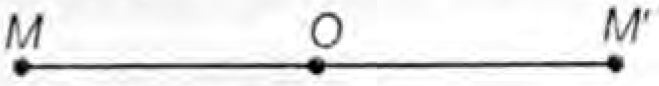
1. Борбордук симметрияда эки чекиттин аралыгы өзгөрбөйт.

O симметрия борбору, *A*, *B* чекиттери берилсин. *O* борборуна карата симметрияда ал чекиттер *A′*, *B′* чекиттерине чагылдырылат (чиймени өзүңөр чийгиле). Аныктаманын негизинде $AO=OA'$, $BO=OB'$. $\angle AOB=\angle A'OB'$ (вертикалдык бурчтар). Демек, *AOB* жана *A′OB′* үч бурчтуктары барабар болушат. Мындан $AB=A'B'$ болот.

2. Борбордук симметрия — бул жылдыруу болуп эсептелет.

3. Борбордук симметриялуу фигуралар барабар болушат.

Бул акыркы эки касиеттин тууралыгы 1-касиеттен жана борбордук симметриянын жогорудагы аныктамаларынан келип чыгат.



151-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. A, B чекиттери, CD **кесиндиси берилген. Аларга:** а) l огуна карата; б) O борборуна карата симметриялуу фигураларды түзгүлө.
2. Кесинди берилген. Анын симметрия огун жана симметрия борборун тапкыла.
3. Квадрат берилген. Анын канча симметрия огу бар, канча симметрия борбору бар? Алар кайда болот?
4. Ромбдун диагоналдарын камтыган түз сызыктар анын симметрия октору болоорун далилдегиле.
5. Тең капталдуу трапециянын негиздеринин тең ортолору аркылуу өткөн түз сызык анын симметрия огу болоорун далилдегиле.
6. Эгерде тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчунун бири 30° ка барабар болсо, кичине катети гипотенузанын жарымына барабар болоорун далилдегиле.

   Көрсөтмө. Чоң катетине карата берилген үч бурчтукка симметриялуу үч бурчтукту түзгүлө.
7. $A(-2; 3)$ жана $B(2; -1)$ чекиттеринин симметрия огун тапкыла.
8. xOy координаталар системасынын Ox огуна карата чокулары $A(1; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(-3; 5)$ болгон ABC үч бурчтугуна симметриялуу үч бурчтукту тапкыла. Алардын периметрлерин салыштыргыла.
9. Ромбдун (квадраттын) үч чокусу берилген. Төртүнчү чокусун түзгүлө.
10. Түз сызык айлананы жанып өтөт. Ал түз сызыкка карата берилген айланага симметриялуу айлананы түзгүлө.
11. Бир жагы, ага жанаша жаткан бурчу жана калган эки жагынын айырмасы боюнча үч бурчтукту түзгүлө.

    Көрсөтмө. Анализде берилген жактын каршысында жаткан бурчтун биссектрисасына карата үч бурчтуктун бир жагын экинчи жагына симметриялуу чагылдыргыла.
12. Берилген диагоналы берилген a түз сызыгында жаткандай, ал эми эки чокусу b жана c түз сызыктарында (же берилген эки айланада) жаткандай ромбду түзгүлө.

    Көрсөтмө. b же c түз сызыгын (же айланалардын бирин) α түз сызыгына карата симметриялуу өзгөрткүлө.
13. Жагы, ага каршы жаткан бурчу жана калган эки жагынын айырмасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

    Көрсөтмө. 11-маселенин чыгарылышынан пайдалангыла.

14*. Эки жагы жана ал жактардын каршысындагы бурчтардын айырмасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

Көрсөтмө. Изделүүчү үч бурчтук ABC болсун, a, b жактары, $\angle B - \angle A = \alpha$ бурчу берилсин. Берилгендер боюнча $AC'C$ үч бурчтугун түзөбүз. C жана C' чекиттеринин симметрия огу l болсун. $AC'C$үч бурчтугун l огуна карата симметриялуу өзгөртсөк, изделүүчү үч бурчтукка ээ болобуз.

15. a түз сызыгы AB кесиндисин кесип өтөт. ABM бурчу a түз сызыгы аркылуу тең экиге бөлүнгөндөй кылып, a түз сызыгынан M чекитин тапкыла.

Көрсөтмө. a түз сызыгына карата B чекитине (же A чекитине) симметриялуу B' чекитин тапкыла. Анда a түз сызыгы менен AB' түз сызыгынын кесилиши изделүүчү M чекити болот.

16. а) Түз сызыктын канча симметрия борбору бар? б) Параллель эки түз сызыктын канча симметрия борбору бар?

17. Борборго карата симметриялуу кесиндилердин барабар экендигин далилдегиле.

18. Төмөндөгүлөрдү далилдегиле: а) төрт бурчтуктун жактарынын ортолору параллелограммдын чокулары болот; б) ал төрт бурчтуктун диагоналдарынын ортолору жана карама-каршы эки жактарынын ортолору да параллелограммдын чокулары болушат; в) алынган үч параллелограмм жалпы борборго ээ.

19. Параллелограммдын бурчтарынын биссектрисалары кесилишкенде тик бурчтукту пайда кылаарын далилдегиле.

20. Борбордук симметрияда берилген айлана ага барабар болгон айланага өзгөртүлөрүн далилдегиле.

Көрсөтмө. Берилген айлананын борборунун жана каалаган чекиттин борбордук симметриясын тапкыла.

21. Чектелген жалпак фигура бирден ашык симметрия борборуна ээ болбой тургандыгын далилдегиле.

Көрсөтмө. Берилген фигура O_1 жана O_2 симметрия борборлоруна ээ болсун, O_1 жана O_2 чекиттери аркылуу түз сызык жүргүзөбүз. Эгерде O_1O_2 түз сызыгы ал фигураны кессе, анда O_1 жана O_2 чекиттери бир эле кесиндинин ортолору болот эле; эгерде O_1O_2 түз сызыгы фигураны кеспесе, анда фигура чектелбеген болот.

22. Жактарынын саны так болгон ар кандай көп бурчтук симметрия борборуна ээ болбой тургандыгын далилдегиле.

23. $A(-2; 4)$ жана $B(4; -6)$ чекиттеринин симметрия борборун тапкыла.

24. Координаталар башталышына карата $M(-2;\ 3)$ чекитине симметриялуу чекитти тапкыла.

25. Борборго карата симметриялуу түз сызыктар параллель болоорун далилдегиле.

26*. Берилген l түз сызыгын жана берилген айлананы кесип өткөндө, алардын арасындагы кесиндиси берилген M чекитинде тең экиге бөлүнгөндөй кылып ал чекит аркылуу түз сызык жүргүзгүлө.

Көрсөтмө. l түз сызыгын же айлананы M чекитине карата симметриялуу чагылдыргыла.

27*. ω жана ω_1 айланаларынын кесилишкен A чекити аркылуу түз сызык жүргүзгүлө. Бул түз сызыктын эки айлананы кескендеги кесиндилери барабар болсун.

Көрсөтмө. Берилген айланалардын бирин A чекитине карата симметриялуу чагылдыргыла.

28. Эки жагы жана үчүнчү жагына жүргүзүлгөн медианасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

29. Үч медианасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

Көрсөтмө. Медианалардын кесилишкен чекитине карата медианалардын бирин симметриялуу чагылдыргыла.

30. Берилген бурчтун ичинде A чекити жатат. A чекити аркылуу, бурчтун жактарынын арасында камалган кесиндиси ал чекитте тең экиге бөлүнгөндөй кылып түз сызык жүргүзгүлө.

Көрсөтмө. Бурчтун жактарынын бирин A чекитине карата симметриялуу чагылдыргыла.

31. Бир чекитте кесилишүүчү үч түз сызык жана алардын биринде жатуучу A чекити берилген. Бир чокусу A чекитинде, ал эми медианалары үч түз сызыкта жаткандай кылып үч бурчтук түзгүлө.

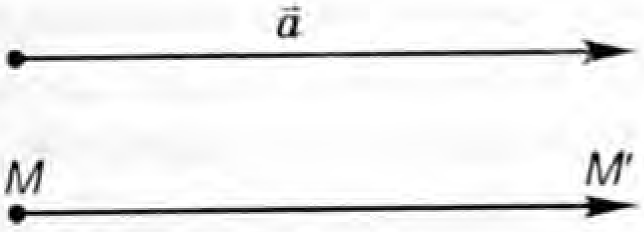
Көрсөтмө. $A\in a$, $a\cap b\cap c=0$ болсун. $\frac{1}{2}AO=OD$ болгондой D чекити табылат (медианалардын касиети). b же c ны D га карата симметриялуу чагылдыргыла.

54.2. ПАРАЛЛЕЛЬ КӨЧҮРҮҮ

$\vec{a}$ вектору берилсин.

Аныктама. **Тегиздиктин ар бир M чекитин M' чекитине $MM' = \vec{a}$ болгондой өзгөртүү** (152-сүрөт) **параллель көчүрүү деп аталат.**

Мында тегиздиктин ар бир чекити $\vec{a}$ векторунун багыты боюнча ошол эле тегиздиктин бирден гана чекитине чагылдырылат. Бул өзгөртүүдө M чекиттерине туура келүүчү M' чекиттердин аралыктары $\vec{a}$ векторунун узундуктарына барабар.



152-сүрөт.

$\vec{a}$ вектору жана өз ара бир маанилүү туура келүүчү M жана M' чекиттери берилсе, анда тегиздикке параллель көчүрүү (которуу) толук аныкталган болот.

Параллель көчүрүү тегиздикти өзүн-өзүнө өз ара бир маанилүү чагылдыруу болот. Чындыгында эле, тегиздикте $\vec{a}$ вектору жана M чекити берилсе, анда $\overrightarrow{MM'}=\vec{a}$ болгондой бир гана M' чекити табылат (эки вектордун барабардыгынын аныктоосу боюнча). Эгерде M' чекитин $\vec{a}$ векторуна карама-каршы болгон $-\vec{a}$ вектору боюнча параллель көчүрсөк, анда бир гана M чекитине ээ болобуз. Эгерде $\vec{a}$ вектору нөл вектор $(\vec{0})$ болсо, анда параллель көчүрүү теңдеш өзгөртүү болот, мында тегиздиктин ар бир чекити өзү-өзүнө өзгөртүлөт.

Эгерде тегиздиктеги F фигурасынын ар бир M чекитин берилген $\vec{a}$ векторуна карата параллель көчүрсөк M' дей чекиттердин көптүгүнө ээ болобуз, алар F' фигурасын аныктайт. Демек, F фигурасын параллель көчүрүүдө F' фигурасы алынган болот.

Параллель которуунун касиеттерине токтолобуз.

1. Параллель которууда эки чекиттин аралыгы өзгөрбөйт.

$\vec{a}$ векторуна параллель көчүрүлүүчү A жана B чекиттери берилсин (чиймесин өзүңөр чийгиле). Анда аныктама боюнча $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BB'}=\vec{a}$ болот, б. а. $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$. Демек, эки вектордун барабардыгынын аныктамасы боюнча AA' жана BB' кесиндилери параллель жана барабар болушат. Ошондуктан, $AA'B'B$ төрт бурчтугу параллелограмм болот, мындан $AB=A'B'$ экендиги келип чыгат.

2. Параллель көчүрүү жылдыруу болот. Бул 1-касиеттен келип чыгат.

3. Параллель көчүрүүдө F фигурасы F' фигурасына өзгөртүлсө, анда F жана F' фигуралары барабар болушат.

Бул касиеттин тууралыгы 1-, 2-касиеттерден жана фигуралардын барабардыгынын аныктамасынан келип чыгат.

4. Параллель көчүрүүдө ар кандай түз сызык ага параллель болгон түз сызыкка өзгөртүлөт.

Бул касиеттин тууралыгы 1-касиеттен келип чыгат. Чындыгында эле, A жана B чекиттери аркылуу өтүүчү AB түз сызыгы параллель көчүрүүдө A' жана B' чекиттери аркылуу өтүүчү $A'B'$ түз сызыгына өзгөртүлөт. Мында $AA'B'B$ параллелограмм болгондуктан, $AB \| A'B'$ экендиги келип чыгат.

Демек, параллель которууда параллель түз сызыктар параллель түз сызыктарга өзгөртүлөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $\vec{a}$ вектору берилген. Ал векторго карата: а) A, B чекиттерин; б) CD кесиндисин; в) a түз сызыгын; г) ABC үч бурчтугун; д) берилген айлананы параллель которгула.
2*. Эгерде үч бурчтуктун эки медианасы барабар болсо, анда ал үч бурчтук тең капталдуу болоорун далилдегиле.
   Көрсөтмө. ABC үч бурчтугунун AE жана CD медианалары барабар болсун. $AD=CE$ экендигин көрсөтсөк, маселе чыгарылат. Ал үчүн ADC жана CEA үч бурчтуктарынын барабардыгын көрсөтүү зарыл. Ушул максатта CD медианасын DE вектору боюнча параллель көчүргүлө.
3*. Трапециянын негиздеринин суммасы диагоналдарынын суммасынан кичине, ал эми алардын айырмасынан чоң экендигин далилдегиле.
   Көрсөтмө. $ABCD$ трапециясынын BD диагоналын DC вектору боюнча параллель көчүрүп, андан кийин үч бурчтуктун жактарын салыштыруу теоремасынан пайдалангыла.
4*. Эгерде $ABCD$ төрт бурчтугунун MN орто сызыгы (M — AD жагынын ортосу, N — BC жагынын ортосу) AB жана CD негиздеринин жарым суммасына барабар болсо, анда төрт бурчтук трапеция болоорун далилдегиле.
   Көрсөтмө. 3-маселенин көрсөтмөсүнөн пайдалангыла.
5. $\vec{a}=(3; -5)$ вектору берилген. Бул векторго карата: а) координаталар башталышын жана $M(4; 6)$ чекитин; б) Ox огун; в) Oy огун параллель көчүргүлө.
6. Параллель көчүрүүдө берилген түз сызык өзүнө параллель түз сызыкка өзгөртүүлөрүн далилдегиле.
7. Параллель көчүрүүдө эки параллель түз сызык кайрадан параллель түз сызыктарга өзгөртүлөөрүн далилдегиле.
   Көрсөтмө. 6-маселенин чыгарылышынан пайдалангыла.
8. ABC үч бурчтугун BC вектору боюнча параллель көчүрсөк $A'B'C'$ үч бурчтугун алабыз. ABC жана $A'B'C'$ үч бурчтуктарынын периметрлерин салыштыргыла.
9. Төрт жагы боюнча трапеция түзгүлө.

Көрсөтмө. Кыска негизинин бир багытына карата каптал жагынын бирин параллель көчүргүлө.

10. Чокусу чиймеде көрсөтүлбөгөн бурчтун биссектрисасын түзгүлө.
Көрсөтмө. Берилген бурчтун жактарын бирдей аралыкка параллель көчүрүү керек.

11. Негиздери жана диагоналдары боюнча трапеция түзгүлө.
Көрсөтмө. 9-маселенин көрсөтмөсүнөн пайдалангыла.

12*.Үч медианасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.
Көрсөтмө. ABC үч бурчтугунун медианаларынын кесилишкен чекити O болсун. OC кесиндисин $\overrightarrow{OB}$ векторуна карата параллель көчүрсөк, $OBC'C$ параллелограммына ээ болобуз. OBC' үч бурчтугун түзүүгө болот. Анын жактары берилген медианалардын $\frac{2}{3}$ бөлүгүн түзөт.

54.3. БУРУУ

Чекиттин айланасында буруууга токтолобуз.

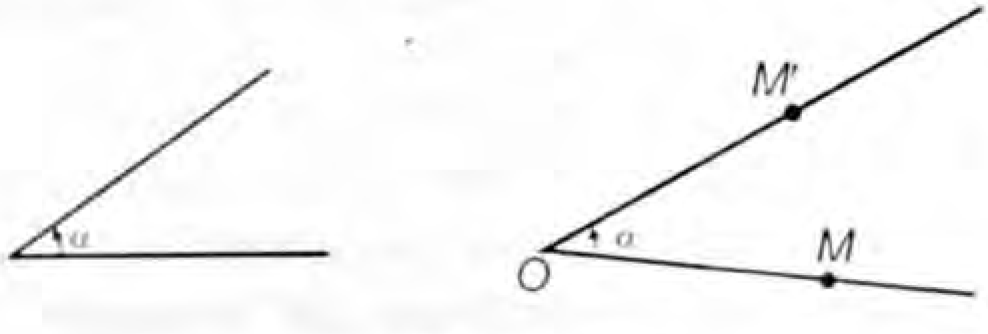
α багытталган бурчу жана O чекити берилсин (153-сүрөт).

Аныктама. **Тегиздиктин M чекитин $OM=OM'$, $\angle MOM'=\alpha$ болгондой кылып M' чекитине өзгөртүү M чекитин O чекитинин айланасында α бурчуна буруу деп аталат.**

Мында O — буруу борбору, α — буруу бурчу деп аталат. Бурууда O борбору өзү-өзүнө өзгөрөт деп эсептелет.

O борборунун айланасында буруунун аткарылышы α бурчунун багытына бирдей багытта бурулса, анда ал буруу **оң багытта** (α оң) болот, ал эми анын багытына каршы бурулса, анда буруу тескери багытта (α терс) аткарылган болот. α бурчунун багыты көрсөтүлбөсө, анда бурууну оң деп түшүнөбүз. α бурчу 0 менен 2π нин арасында өзгөрөт $(0\leq\alpha\leq2\pi)$. Эгерде $\alpha=0$ (же 2π) болсо, анда M чекити өзү-өзүнө өзгөргөн болот (же теңдеш өзгөртүлгөн болот). Бул учурда теңдеш буруууга ээ болобуз.

Чекиттин айланасында буруу бир маанилүү чагылдыруу болот. Ошондуктан ал геометриялык өзгөртүү. Чындыгында эле, тегиздикте O борбору, α бурчу (белгилүү бир багыт боюнча) жана



153-сүрөт.

M чекити берилсе, $OM=OM'$, $\angle MOM'=\alpha$ болгондой бир гана M' чекитин табууга болот. Ал эми ошол эле O борборунун айланасында M' чекитин $-\alpha$ бурчуна (α га карама-каршы) бурсак, анда бир гана M чекитине ээ болобуз. Бул учурда мурдагыга караганда тескери бурууну алабыз.

Чекиттин айланасында буруунун төмөндөгүдөй касиеттери бар.

1. Чекиттин айланасында бурууда эки чекиттин аралыгы өзгөрбөйт.

O буруу борборуна жана α буруу бурчуна карата буруу берилсин. A жана B чекиттери бул бурууда A' жана B' чекиттерине өтөт. (Тиешелүү чиймени өзүнөр чийгиле).

Буруунун аныктамасы боюнча

$$OA=OA',\ OB=OB',\ \angle AOA'=\angle BOB'=\alpha.$$

Анда

$$\angle AOA'-\angle BOA'=\angle BOB'-\angle BOA'.$$

$$\angle AOB'=\angle A'OB'.$$

Натыйжада $\Delta OAB=\Delta OA'B'$ болот. Ошентип: $AB=A'B'$ ээ болобуз.

2. Чекиттин айланасында буруу жылдыруу болот. Бул касиеттин тууралыгы жылдыруунун аныктамасы жана 1-касиеттин жардамы менен негизделет.

3. F фигурасын берилген буруу боюнча өзгөрткөндө F' фигурасы алынса, анда F жана F' фигуралары барабар болушат.

F фигурасын O чекиттин айланасында α бурчуна бурганда F' фигурасы алынды деп эсептейли. Анда F фигурасынан алынган ар кандай A, B эки чекитине F' фигурасынан алынган A', B' эки чекити туура келет. Ал эми 1-касиеттин негизинде $AB=A'B'$ болот. Анда фигуралардын барабардыгынын аныктамасынын негизинде F жана F' фигуралары барабар болот.

Натыйжада чекиттин айланасында бурууда түз сызык, шоола тиешелүү түрдө түз сызыкка, шоолага өзгөртүлөт. Бул натыйжанын тууралыгы түздөн-түз 3-касиеттен келип чыгат.

4. Эгерде буруу бурчу $\alpha=180°$ болсо, анда O борборунун айланасында буруу борбордук симметрия болот.

Чындыгында эле, бурууда M чекити M' чекитине өтсө, анда M, O, M' чекиттери бир түз сызыкта жатып, борбордук симметриянын аныктамасына баш иет.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. O жана M чекиттери берилген. M чекитин O чекитинин айланасында (сааттын жебесинин айлануу багытына каршы

багытта) а) 60°; б) 90°; в) 180° ка бургандан келип чыгуучу M' чекитин түзгүлө.

2. O борбору, α бурчу берилген. а) AB кесиндисин; б) a түз сызыгын; в) ω айланасын O борборунун айланасында (берилген багытта) α бурчуна бургула.
3. α=180° болгондо буруу борбордук симметрия болоорун далилдегиле.
4. ΔABC берилген. A чокусунун айланасында 90° ка бурганда $\Delta AB'C'$ алынат, аны түзгүлө.
5. Ар бир чокусу берилген параллель үч түз сызыкта жаткан тең жактуу үч бурчтукту түзгүлө.
   Көрсөтмө. Берилген түз сызыктардын биринен A чекитин белгилегиле. Калган эки түз сызыктын бирин A чекитинин айланасында 60° бурчка бургула.
6. Чокулары борбордош үч айланада жатуучу тең жактуу үч бурчтукту түзгүлө.
   Көрсөтмө. 5-маселенин көрсөтмөсүнөн пайдалангыла.
7. Үч чокусу берилген параллель үч түз сызыкта жатуучу квадратты түзгүлө. (5-маселенин чыгарылышынан пайдалангыла).
8. Бурч жана анын ичинде жаткан A чекити берилген. Тик бурчунун чокусу A чекитинде, калган эки чокусу берилген бурчтун жактарында жаткандай кылып тең жактуу тик бурчтуу үч бурчтук түзгүлө.
   Көрсөтмө. Берилген бурчтун жактарынын бирин A чекитинин айланасында 90° ка бургула.
9. xOy системасында $A(2; 0)$ жана $B(0; -3)$ чекиттери берилген. Координаталар башталышынын айланасында ал чекиттерди сааттын жебесинин айлануу багытына карата: а) каршы багытта; б) бирдей багытта 90° ка бурсак, кандай чекиттер пайда болот?

§ 55. ГОМОТЕТИЯ. ОКШОШ ӨЗГӨРТҮҮ

Биз жылдырууда фигуранын формасы да, чоңдугу да, б.а. сызыктуу чоңдуктары өзгөрбөй тургандыгын көрдүк. Геометрияда формасын өзгөртпөй, бирок сызыктуу чоңдуктарын бирдей санга чоңойтуучу же кичирейтүүчү өзгөртүү да каралат. Андай өзгөртүүнүн катарына окшош өзгөртүү кирет.

Аныктама. **Тегиздиктин ар кандай A жана B чекиттерин тиешелүү түрдө A' жана B' чекиттерине $A'B'=k\cdot AB$ ($k\neq 0$) болгондой кылып чагылдыруу окшош өзгөртүү деп аталат.**

Мында k саны окшоштук коэффициенти деп аталат.

Окшош өзгөртүү өз ара бир маанилүү болоору түшүнүктүү.

F фигурасы берилсин. Анын ар бир M чекитин k окшоштук коэффициенти боюнча M' чекитине өзгөртөбүз. Анда M' чекиттеринин көптүгү F' фигурасын аныктайт. Мында F' фигурасы F фигурасынан окшош өзгөртүү аркылуу алынган болот. Мындай F жана F' фигуралары окшош деп аталышат да, $F \sim F'$ деп белгиленет (мында ~ окшоштук белгиси). Мисалы 154-сүрөттөгү фигуралар окшош.

Эгерде $k=1$ болсо, анда окшош өзгөртүү жылдыруу болот, б. а. теңдеш өзгөртүү болот.

Окшош өзгөртүүнүн аныктамасы боюнча $A'B'=k \cdot AB$ (1) болот. (1) барабардык $F \sim F'$ фигураларынын бардык чекиттери үчүн туура.

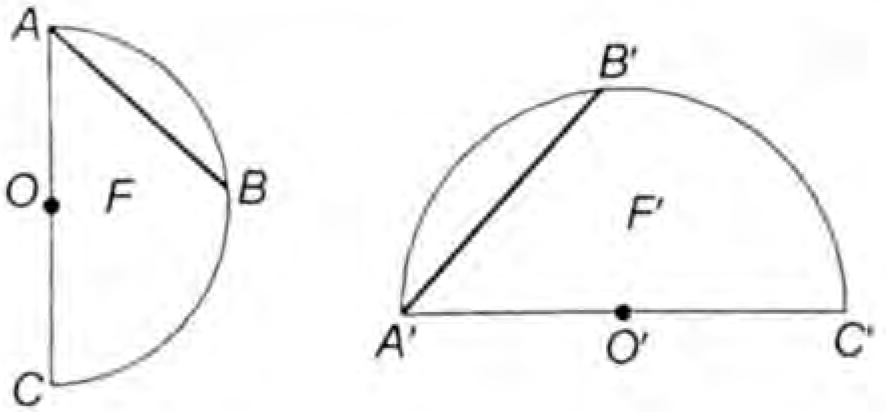
Ошондуктан окшош фигуралардын туура келүүчү кесиндилеринин катыштары барабар (пропорциялаш) болушат.

Анда үч бурчтуктардын жана көп бурчтуктардын окшоштуктары төмөнкүдөй аныкталат.

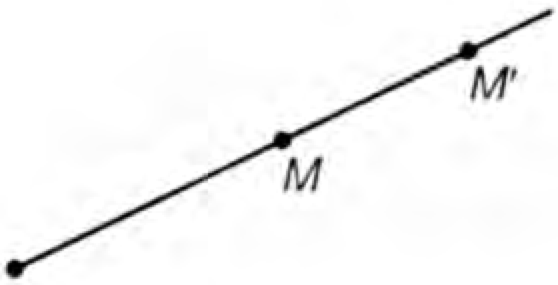
Эгерде эки үч бурчтуктун жактары пропорциялаш жана тиешелүү бурчтары барабар болушса, анда алар окшош болушат.

Демек, ΔABC жана $\Delta A'B'C'$ үчүн $AB:A'B'=BC:B'C'=CA:C'A'$, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$ болсо, анда $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ болот. Эгерде эки көп бурчтуктун туура келүүчү жактары пропорциялаш, ал эми туура келүүчү бурчтары барабар болсо, алар окшош болушат.

Мындан, эки туура n бурчтуктар окшош болушат деп айта алабыз. Анткени алардын тиешелүү жактарынын катыштары барабар жана тиешелүү бурчтары да барабар. Эки туура n бурчтуктун окшоштук коэффициенти алардын эки жагынын катышына же аларга сырттан (ичтен) сызылган айланалардын радиустарынын катышына барабар болоору түшүнүктүү.



154-сүрөт.



155-сүрөт.

---

[1] Грек сөзү — өз ара окшош жайланышкан дегенди түшүндүрөт.

O чекити жана $k \neq 0$ саны берилсин.

Аныктама. **Тегиздиктин ар бир M чекитин $OM'=k \cdot OM$ болгондой кылып, OM түз сызыгында жатуучу M' чекитине чагылдыруу гомотетия[1] же борбордук окшош өзгөртүү деп аталат.**

Мында O — гомотетия борбору, k — гомотетия коэффициенти болот. M жана M' гомотетиялуу чекиттер болушат. O борбору өзү-өзүнө гомотетиялуу деп эсептелет (155-сүрөт).

Эгерде $k>0$ ($k<0$) болсо, анда OM жана OM' кесиндилеринин багыттары бирдей (карама-каршы) болот, б. а. M жана M' чекиттери O борборунун бир (ар түрдүү) жагында жатышат.

Бул учурда M жана M' чекиттери түз (тескери) гомотетиялуу чекиттер болушат.

O борбору жана k коэффициенти боюнча берилген гомотетия F фигурасынын ар бир M чекитин M' чекитине которсун. Анда M' чекиттеринин чогуусу F' фигурасын аныктайт. Мында F жана F' фигуралары гомотетиялуу деп аталышат.

Эгерде $k=1$ болсо, анда $OM'=OM$ болот да, M чекити өзүнө гомотетиялуу болгон M' чекити менен дал келет. Бул учурда теңдеш гомотетияга ээ болобуз, мында ар кандай фигура өзү-өзүнө гомотетиялуу болот.

Эгерде $k=-1$ болсо, анда аныктаманын негизинде $OM'=-OM$ болот. Бул учурда M жана M' чекиттери O борборунун ар түрдүү жагында болуп, андан бирдей алыстыкта жатышат, б. а. M жана M' чекиттери O борборуна карата симметриялуу болушат. Ошентип, бул учурдагы гомотетия борбордук симметрия болот.

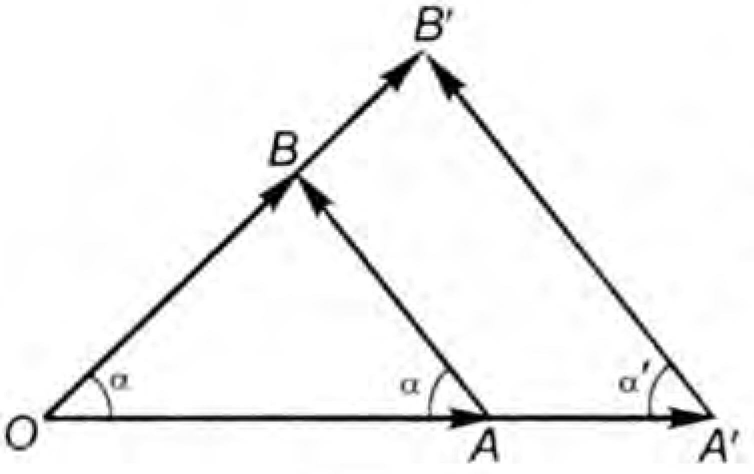
O борбору, k коэффициенти менен берилген гомотетия M чекитин M' чекитине чагылдырса, анда ошол эле O борбору жана $\frac{1}{k}$ коэффициенти менен алынган гомотетия ага тескери деп аталат да, ал M' чекитин кайрадан M чекитине өзгөртөт, чындыгында эле $OM'=k \cdot OM$ барабардыгынан $OM=\frac{1}{k} OM'$ ди алабыз.

Гомотетиянын төмөндөгүдөй касиеттери бар.

1. Гомотетия өз ара бир маанилүү өзгөртүү болот.

O борбору жана k коэффициенти боюнча гомотетия берилсин. Бул гомотетия M чекитин M' жана M'' эки чекитине өзгөртөт деп эсептейли. Анда $OM'=k \cdot OM$ жана $OM''=k \cdot OM$ болот. Мындан $OM'=OM''$ барабардыгына ээ болобуз, б. а. M' жана M'' чекиттери дал келишет. Демек, берилген гомотетияда M чекити бир гана M' чекитине өзгөртүлөт, тескери гомотетияда M' чекити кайрадан бир гана M чекитине өзгөртүлөт.

2. Гомотетия борбору аркылуу өтүүчү түз сызык өзү-өзүнө өзгөртүлөт.



156-сүрөт.

a түз сызыгы *O* гомотетия борбору аркылуу өтсүн. Берилген гомотетия *a* түз сызыгынын ар бир *M* чекитин *M'* чекитине өзгөртөт. Аныктама боюнча *M*, *O*, *M'* чекиттери бир түз сызыкта (*a* да) жатышы керек. Демек, *M'* чекити *a* түз сызыгында жатат.

3. Эгерде *O* борбору, *k* коэффициенти боюнча берилген гомотетия AB кесиндисин $A'B'$ кесиндисине өзгөртсө, анда $A'B'=k\cdot AB$ жана $A'B'\|AB$ болот.

A жана *B* чекиттери *O* борбору аркылуу өтүүчү түз сызыкта жатпасын. Берилген гомотетия *A* жана *B* чекиттерин тиешелүү түрдө *A'* жана *B'* чекиттерине которот (156-сүрөт). Анда $OA'=k\cdot OA$, $OB'=k\cdot OB$ болот. Мындан $OA':OB'=OA':OB$.

Ошондой эле, $\overrightarrow{OA}=|k|\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}=|k|\cdot\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA'}$, $|k|(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=|k|\overrightarrow{AB}$ же $A'B'=|k|\cdot\overrightarrow{AB}$. β — жалпы бурч, $\overrightarrow{A'B'}$ жана $\overrightarrow{AB}$ векторлору параллель жана бирдей багытталган, ошондуктан $A'B'=k\cdot AB$, $A'B'\|AB$ болот.

1-натыйжа. **Гомотетиялуу түз сызыктар параллель болушат.**

Бул 3-касиеттен келип чыгат. ($A'B'\|AB$, себеби $\alpha=\alpha'$).

2-натыйжа. **Гомотетия окшош өзгөртүү болот.** Бул натыйжанын тууралыгы окшош өзгөртүүнүн аныктамасынан жана 3-касиеттен келип чыгат. Демек, гомотетиянын бардык касиеттери окшош өзгөртүү үчүн да туура болот.

4. Гомотетияда параллель эки түз сызык параллель эки түз сызыкка өтөт. $a\|b$ түз сызыктары жана кандайдыр бир гомотетия берилсин. Берилген гомотетия *a* жана *b* түз сызыктарын тиешелүү түрдө *a'* жана *b'* түз сызыктарына которот. Бирок, 1-натыйжанын негизинде $a\|a'$, $b\|b'$. Шарт боюнча $a\|b$ болгондуктан $a'\|b'$ болот.

Демек, гомотетияда эки түз сызыктын арасындагы бурч өзгөрбөйт, б. а. берилген бурч ага барабар бурчка өзгөртүлөт.

Дагы бир өзгөчөлүктү белгилей кетели. $k>0$ коэффициенти аркылуу берилген окшош өзгөртүү кандайдыр *F* фигурасын *F'* фигурасына чагылдырсын. Анда *F* фигурасындагы каалаган *AB* кесиндиси *F'* фигурасында ага туура келүүчү

$$A'B'=k\cdot AB \qquad (1)$$

кесиндисине чагылдырылат.

Эми O борбору жана k коэффициенти менен берилген гомотетия F ти F_1 фигурасына чагылдырсын. Анда F фигурасындагы AB кесиндиси F_1 фигурасында ага туура келүүчү

$$A_1B_1=k\cdot AB \tag{2}$$

кесиндисине чагылдырылат. Анда (1), (2) барабардыктардан

$$A_1B_1=A'B' \tag{3}$$

деп жазууга болот. F_1 ди F' ке дал келгендей кылып жылдырууга болот. Бул жогорудагы талкуулоолор F, F', F_1 фигураларынын бардык туура келүүчү чекиттери үчүн туура болот. Демек, F фигурасын адегенде гомотетиялуу өзгөртүп, андан кийин жылдырып деле F' фигурасын алууга болот. Ошентип, окшош өзгөртүүнү гомотетия менен жылдыруунун удаалаш аткарылышы (көбөйтүндүсү же композициясы) деп да эсептөөгө болот.

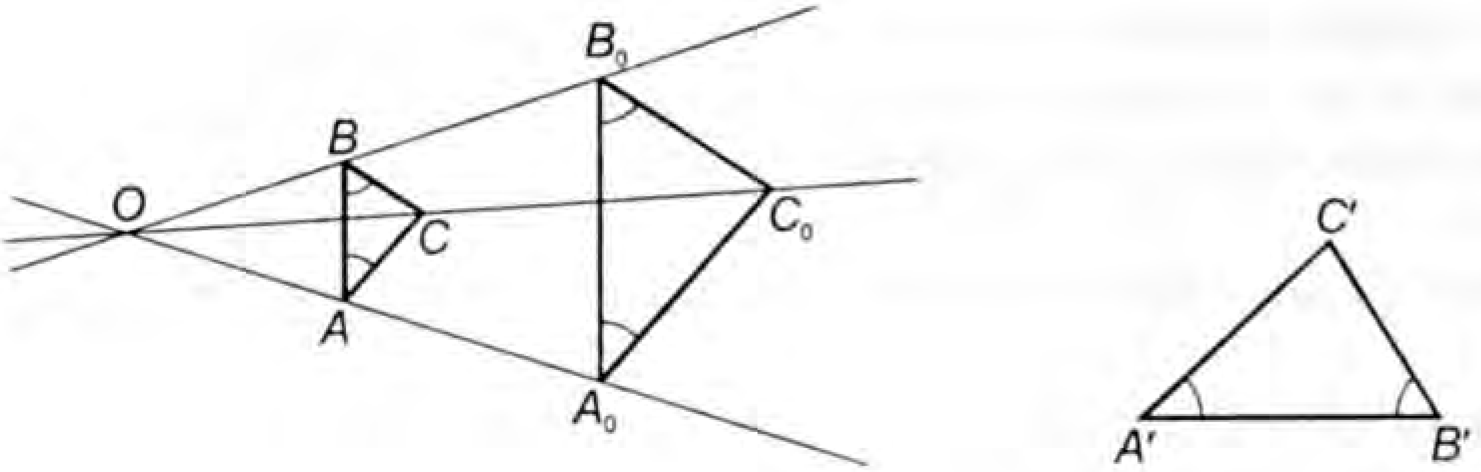
КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Ар кандай фигура өзүнө гомотетиялуу болоорун далилдегиле.
2. Барабар фигуралар гомотетиялуу болушабы?
3. Гомотетиянын бир түз сызыкта жатпаган эки түгөй туура келүүчү чекиттери берилсе, анын борборун тапкыла.
4. Гомотетиянын O борбору, $k=2$ коэффициенти берилсе, ABC үч бурчтугуна гомотетиялуу үч бурчтукту түзгүлө.
5. ABC үч бурчтугу берилген. Анын орто сызыктары аркылуу $A'B'C'$ үч бурчтугу түзүлгөн. Берилген үч бурчтуктун медианаларынын кесилишкен чекитине карата ал эки үч бурчтук гомотетиялуу экендигин далилдегиле.
6. Бири-бирине барабар болбогон эки айлана гомотетиялуу болоорун далилдегиле.
7. Гомотетияда: а) параллелограмм; б) трапеция; в) ромб кандай фигурага өзгөрөт?
8. xOy системасында O борбору, $k=3$ коэффициенти боюнча берилген гомотетияда $A(1;0)$; $B(0;2)$; $C(-2;0)$; $D(0;-1)$ чекиттери кандай чекиттерге чагылдырылат?

   Көрсөтмө. $\overrightarrow{OM'}=k\cdot\overrightarrow{OM}$ барабардыгын пайдалангыла.

§ 56. ОКШОШ ФИГУРАЛАР. ҮЧ БУРЧТУКТАРДЫН ОКШОШТУК БЕЛГИЛЕРИ

Биз жогоруда (§ 55) окшош фигураларды окшош өзгөртүүлөр аркылуу алууга мүмкүн экендигин карадык. Окшош фигураларга аныктаманы бердик, алардын касиеттерин көрсөттүк.



157-сүрөт.

Анын ичинде окшош үч бурчтуктарга § 55 та аныктама берилген. Мында ал түшүнүктөргө негиздеп, үч бурчтуктун окшоштук белгилерине гана токтолобуз.

Үч бурчтуктардын окшоштугунун үч белгиси бар. Алар төмөндөгүдөй теоремалар аркылуу баяндалат.

65 - *теорема* (1-белгиси). **Эгерде бир үч бурчтуктун эки бурчу экинчи үч бурчтуктун тиешелүү эки бурчуна барабар болсо, анда ал үч бурчтуктар окшош болушат.**

Далилдөө. ΔABC жана $\Delta A'B'C'$ берилген (157-сүрөт). $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$. $\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$ болоорун далилдөө керек.

Каалагандай O борбору жана $k=A'B':AB$ коэффициенти боюнча аныкталган гомотетияны карайбыз. Ал гомотетия ΔABC ны $\Delta A_0B_0C_0$ гө өзгөртөт. Гомотетиянын касиеттеринин негизинде $\Delta ABC\sim\Delta A_0B_0C_0$, ошону менен бирге $B_0=k\cdot AB$, $\angle A=\angle A_0$, $\angle B=\angle B_0$ болот. Бирок, теореманын шарты жана түзүү боюнча $A'B'=k\cdot AB$, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$.

Мындан $A'B'=A_0B_0$, $\angle A'=\angle A_0$, $\angle B=\angle B_0$. Үч бурчтуктардын барабардыгынын 2-белгиси боюнча $\Delta A_0B_0C_0=\Delta A'B'C'$.

§ 55 та акыркы түшүнүктөрдүн негизинде $\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$. Теорема далилденди.

66 - теорема (2-белгиси). **Эгерде бир үч бурчтуктун эки жагы экинчи үч бурчтуктун эки жагына пропорциялаш болуп, ал жактардын арасындагы бурчтар барабар болушса, анда ал үч бурчтуктар окшош болушат.**

Далилдөө. 157-сүрөттөн пайдаланабыз. ΔABC, $\Delta A'B'C'$ да $A'B':AB=B'C':BC$, $\angle B=\angle B'$ болсун. Үч бурчтуктардын окшоштугун далилдейбиз.

Каалагандай O борбору жана $k=A'B':AB$ коэффициенти менен берилген гомотетия ΔABC ны ага окшош болгон $\Delta A_0B_0C_0$ го өзгөртөт, $A_0B_0=k\cdot AB$, $B_0C_0=k\cdot BC$, $\angle B=\angle B_0$ болот. Теореманын шарты боюнча $A'B'=k\cdot AB$, $B'C'=k\cdot BC$, $\angle B=\angle B'$. Мындан $A_0B_0=$ $=A'B'$, $B_0C_0=B'C'$, $\angle B=\angle B'$ болот. Үч бурчтуктардын барабардыгынын 1-белгиси боюнча $\Delta A_0B_0C_0=\Delta A'B'C'$. § 55 та акыркы түшүнүктөрдүн негизинде $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ болот. Теорема далилденди.

67 - теорема (3-белгиси). **Эгерде бир үч бурчтуктун үч жагы экинчи үч бурчтуктун үч жагына пропорциялаш болушса, анда ал үч бурчтуктар окшош болушат.**

Далилдөө. 157-сүрөттү пайдаланабыз. ΔABC, $\Delta A'B'C'$ да $A'B':AB=B'C':BC=A'C'$ болсун. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ болоорун далилдейбиз. Далилдениши жогорудагы 65, 66-теоремалардын далилдениишине окшош. Өз алдыңарча далилдегиле.

Натыйжалар. Эгерде тик бурчтуу үч бурчтуктар: 1) бирден барабар тар бурчка ээ болсо; 2) биринин катеттери экинчисинин катеттерине пропорциялаш болсо, анда алар окшош болушат.

1) учурдун тууралыгы 65-теоремадан келип чыгат, анткени эки тик бурчтуу үч бурчтуктун бирден тар бурчтары барабар болсо, анда алардын экинчи тар бурчтары да барабар болот (тик бурчтары барабар).

2) учурдун тууралыгы 66-теоремадан келип чыгат.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Окшош фигураларга мисалдар келтиргиле. Алар эмне үчүн окшош экендигин түшүндүргүлө.
2. Биринчи квадраттын периметри 24 см, ал эми экинчи квадраттын жагы 18 см болсо, алардын окшоштук коэффициентин тапкыла.
3. Айлананын диаметри 8 см. $k=2,5$ окшоштук коэффициенти боюнча аныкталган экинчи айлананын радиусун тапкыла.
4. Үч бурчтуктун жактарынын катышы 345ке барабар. Ага окшош үч бурчтуктун кичине жагы 12 дм. Экинчи үч бурчтуктун калган жактарын тапкыла.
5. Үч бурчтуктун жактарынын катышы 356га барабар. Ага окшош үч бурчтуктун периметри 4,2 дм. Экинчи үч бурчтуктун жактарын тапкыла.
6. ABC жана $A'B'C'$ үч бурчтуктарында $\alpha=\alpha_1, \beta=\beta_1$. Бул үч бурчтуктар үчүн: 1) $a=20$; $b=28$; $a_1=50$; $c_1=40$ болсо, c жана b жактарын; 2) $a=105$; $a_1=63$; $c-c_1=24$ болсо c жагын тапкыла.
7. Эки тең капталдуу үч бурчтуктун чокусундагы бурчтары барабар. Бир үч бурчтуктун каптал жагы жана негизи 8,5 дм жана 5 дм. Экинчисинин негизи 4 дм. Анын каптал жагын тапкыла.
8. Эгерде эки үч бурчтуктун жактары төмөндөгүдөй болуп берилсе, алар окшош болушабы: 0,1 м, 0,15 м, 0,2 м жана 1 см, 1,5 см, 2 см; 5 м, 10 м, 75 дм жана 64 дм, 40 дм, 80 дм; 10 м, 20 м, 12,5 м жана 100 см, 90 см, 160 см?

9. Бир үч бурчтуктун жактары 8 дм, 16 дм жана 20 дм. Ага окшош үч бурчтуктун периметри 55 дм. Экинчи үч бурчтуктун жактарын тапкыла.

10. Бир үч бурчтуктун периметри ага окшош үч бурчтуктун периметринин $\frac{3}{11}$ бөлүгүн түзөт. Эки окшош жагынын айырмасы 10 дм. Ал жактарды тапкыла.

11. ABC үч бурчтугунда $AC \| DE$ ($D \in AB$, $E = \in BC$ кесиндиси жүргүзүлгөн. Эгерде: 1) $AC=2$ дм, $AB=1,7$ дм жана $BD=11,9$ см болсо, DE кесиндисин; 2) $AB=1,6$ дм, $AC=20$ см жана $DE=1,5$ дм болсо, AD кесиндисин; 3) $AC:DE=\frac{5}{7}:\frac{4}{11}$ болсо, анда $AD:BD$ катышын аныктагыла.

12. Берилген периметри боюнча берилген үч бурчтукка окшош болгон үч бурчтукту түзгүлө.

13. Бурчтун ичинде жаткан M чекити аркылуу өтүп, ал бурчтун жактарын жануучу айлананы түзгүлө.

Көрсөтмө. Бурчтун жактарын жанып өтүүчү айлананы сызып, аны бурчтун чокусуна карата M чекити аркылуу өткөндөй кылып гомотетиялуу өзгөрткүлө.

14. Берилген үч бурчтуктун ичинде, бардык чокулары анын жактарында жаткандай кылып ромбду сызгыла. Ромбдун тар бурчу берилген.

Көрсөтмө. Адегенде изделүүчү ромбго окшош, бирок үч чокусу берилген үч бурчтуктун эки жагында жаткандай ромбду сызгыла. Андан кийин аны үч бурчтуктун чокусу боюнча гомотетиялуу өзгөрткүлө.

15. Берилген үч бурчтуктун ичине, берилген параллелограммга окшош параллелограмм сызгыла.

16. Берилген ромбго ичтен сызылган квадратты түзгүлө.

17. Бир беш бурчтуктун жактары 3,5 дм, 1,4 дм, 2,8 дм, 2,1 дм, жана 4,2 дм. Ага окшош беш бурчтуктун кичине жагы 1,2 дм. Анын калган жактарын тапкыла.

18. Бир төрт бурчтуктун жактарынын катышы $1:\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:2$ катышына барабар. Ага окшош төрт бурчтуктун периметри 7,5 м. Экинчи төрт бурчтуктун жактарын аныктагыла.

19. Бир төрт бурчтуктун жактары 1 м, 1,5 м, 2 м жана 2,5 м. Ага окшош төрт бурчтуктун эң чоң жана эң кичине жактарынын суммасы 2,8 м. Экинчи төрт бурчтуктун жактарын тапкыла.

20. Эки окшош көп бурчтуктун эң чоң жактары 3,5 м жана 1,4 м, ал эми алардын периметрлеринин айырмасы 6 м. Периметрлерин эсептегиле.

§ 57. ОКШОШ КӨП БУРЧТУКТАРДЫН АЯНТТАРЫНЫН КАТЫШЫ

67 - *теорема* . **Окшош көп бурчтуктардын аянттарынын катышы окшоштук коэффициентинин квадратына барабар.**

Далилдөө. n бурчтуу F_1 жана F_2 окшош көп бурчтуктары берилсин. Алардын окшоштук коэффициентин k деп алалы. Берилген көп бурчтуктардын аянттарын салыштырабыз.

$F_1 \sim F_2$ болгондуктан, F_1 көп бурчтугун F_2 көп бурчтугуна өзгөртүүчү окшош өзгөртүү болот.

F_1 көп бурчтугун n үч бурчтуктарга бөлөбүз: $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$. Мында Δ_i (i=1, 2,..., n) ички жалпы чекиттерге ээ болбойт жана $F_1=\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n$. Анда жогоруда аталган окшош өзгөртүү бул үч бурчтуктарды F_2 көп бурчтугунун $\Delta_1', \Delta_2', ..., \Delta_n'$ үч бурчтуктарына өзгөртөт да, $\Delta_i'=\Delta_i$ (i=1, 2,..., n) жана $F_2=\Delta_1'+\Delta_2'+...+\Delta_n'$ болот. Эгерде Δ_i үч бурчтугунун негизи a_i жана бийиктиги h_i болсо, анда аларга окшош болгон Δ_i' үч бурчтугунун a_i' негизи жана h_i' бийиктиги тиешелүү түрдө $a_i'=ka_i$ жана $h_i'=kh_i$ болот.

Көп бурчтуктун аянтын аныктоодогу касиеттердин негизинде F_1 көп бурчтугунун аянты:

$$S(F_1)=S(\Delta_1)+S(\Delta_2)+\ldots+S(\Delta_n)=\frac{1}{2}a_1h_1+\frac{1}{2}a_2h_2+\ldots+\frac{1}{2}a_nh_n \quad (4)$$

болот. Ал эми F_2 көп бурчтугунун аянты:

$$S(F_2)=S(\Delta_1')+S(\Delta_2')+\ldots+S(\Delta_n')=\frac{1}{2}a_1'h_1'+\frac{1}{2}a_2'h_2'+\ldots+\frac{1}{2}a_n'h_n'=$$

$$=\frac{1}{2}ka_1kh_1+\frac{1}{2}ka_2kh_2+\ldots+\frac{1}{2}ka_nkh_n=k^2S(F_1) \quad (5)$$

болот, мында (4) формула пайдаланылды. (5) формуладан $S(F_2):S(F_1)=k^2$ болот. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Эгерде квадраттын жагын: а) үч эсе чоңойтсок; б) төрт эсе кичирейтсек, анын аянты кандай өзгөрөт?
2. Эгерде тең жактуу үч бурчтуктун жагын: 1) эки эсе чоңойтсок; 2) үч эсе кичирейтсек, анда анын аянты кандай өзгөрөт?
3. Бир квадраттын жагы a, экинчисиники b болсо, алардын аянттарынын катышын тапкыла.
4. Айланага сырттан сызылган квадраттын аянты ошол эле айланага ичтен сызылган квадраттын аянтынан канчага чоң?
5. Үч бурчтуктун жагы 8 см. Ага окшош үч бурчтуктун аянты үч эсе чоң болсо, анда анын туура келүүчү жагын тапкыла.

6. Үч бурчтуктун жактарынын бири үч барабар бөлүккө бөлүнүп, бөлүү чекиттери аркылуу экинчи жагына параллель түз сызыктар жүргүзүлгөн. Берилген үч бурчтуктун жана түз сызыктар аркылуу түзүлгөн үч бурчтуктардын аянттарынын катышын тапкыла.

7. Үч бурчтуктун бийиктиги h. Үч бурчтуктун аянтын тең экиге бөлүүчү жана негизине параллель болгон түз сызык үч бурчтуктун чокусунан кандай аралыкта болот?

8. Үч окшош көп бурчтуктардын аянттарынын суммасы 484 см^2, алардын периметрлеринин катышы 234 кө барабар. Ар бир көп бурчтуктун аянтын тапкыла.

9. Жактары a жана b болгон эки туура n жактуу көп бурчтуктардын аянттарынын катышын тапкыла.

Көрсөтмө. § 41 тын 10-маселесиндеги (1) формуланы пайдалангыла.

10. Бир эле айланага сырттан жана ичтен сызылган туура n бурчтуктун аянттарынын катышын тапкыла.

Көрсөтмө. § 41 тын 13, 16-маселелериндеги (2) жана (3) формулаларды пайдалангыла.

11. Берилген айланага сырттан жана ичтен сызылган туура: 1) үч; 2) алты бурчтуктардын аянттарынын катышын эсептегиле.

X ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Өз ара бир маанилүү чагылдырууну түшүндүрүп бергиле. Мисалдар келтиргиле.
2. Тегиздикти геометриялык өзгөртүү дегенди кандай түшүндүрүүгө болот?
3. Жылдыруу фигураны кандай өзгөртөт?
4. Кандай фигуралар барабар болушат?
5. Жылдырууда түз сызык (кесинди, шоола) кандай фигурага өзгөрүлүп өтөт?
6. Жылдыруунун кандай түрлөрү бар?
7. Октук (борбордук) симметрия жылдыруу болобу? Эмне үчүн?
8. Чекиттин айланасында бурууну түшүндүрүп бергиле. Ал жылдыруу болобу? Эмне үчүн?
9. Параллель которууда фигуранын кандай элементтери чоңдугун өзгөртпөйт?
10. Окшош өзгөртүүгө түшүнүк бергиле.
11. Кандай фигуралар окшош болушат? Мисалдар келтиргиле.
12. Эмне үчүн туура n бурчтуктар окшош болушат?
13. Окшош өзгөртүүдө туура келүүчү кесиндилердин кандай өзгөрө тургандыдыгын түшүндүрүп бергиле.
14. Гомотетияны аныктагыла. Ал кандай өзгөртүү болот?
15. Гомотетияда түз сызык кандай түз сызыкка өзгөрөт? Параллель түз сызыктарчы?

16. Гомотетия окшош өзгөртүү болобу? Окшош өзгөртүүнү гомотетия деп эсептөөгө болобу?
17. Окшош өзгөртүүнүн, гомотетиянын жана жылдыруунун кандай байланышы бар?
18. Жылдыруу окшош өзгөртүү боло алабы? Тескерисинче айтууга мүмкүнбү?
19. Барабар фигуралар окшош болушабы?
20. Эки үч бурчтуктун окшоштугунун белгилерин айтып бергиле.
21. Тик бурчтуу үч бурчтуктардын окшоштук белгилери кандай айтылат?

X ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. Борборлош эки айлана берилген. Алардын борбору O болсун. Биринчи айлананын M чекитине экинчи айлананын OM шооласында жаткан M' чекити туура келет десек, анда айланалардын чекиттери кандай туура келишет? Мында кандай чагылдырууга ээ болобуз?
2. Жарым айлана диаметрине тик проекцияланган. Жарым айлана менен диаметрдин чекиттери кандай туура келишет? Бул кандай чагылдыруу болот?
3. AB кесиндисин O борборунан CD кесиндисине проекциялап MN кесиндисине ээ болдук деп эсептейли. MN кесиндиси CD кесиндисинин ичинде жатсын. Бул проекциялоодо AB жана MN кесиндилеринин чекиттери кандай туура келишет? AB жана CD кесиндилеринин чекиттеричи?
4. Тегиздиктин ар бир M чекитине, анын L түз сызыгындагы тик проекциясы болгон M' чекити туура келсин. Тегиздик менен L түз сызыгынын чекиттери өз ара кандай туура келишет?
5. а) Кесинди; б) түз сызык; в) айлана; г) тең жактуу үч бурчтук канча симметрия огуна ээ болот?
6. а) Кесинди; б) түз сызык канча симметрия борборуна ээ болот? Түшүндүргүлө.
7. Үч бурчтуктун симметрия борбору болбой тургандыгын далилдегиле.
8. Параллелограммдын диагоналдарынын кесилишкен чекити симметрия борбору болоорун далилдегиле.
9. Параллель эки түз сызыкка (борборго) карата удаалаш аткарылган эки октук (борбордук) симметриянын натыйжасы параллель которуу болоорун далилдегиле.
10. Ар кандай фигура өзүнө окшош болоорун далилдегиле.
11. Эгерде F фигурасы F_1 фигурасына, ал эми F_1 фигурасы F_2 фигурасына окшош болсо, анда F жана F_2 фигуралары да окшош болоорун далилдегиле. Окшоштук коэффициенти кандай болот?

12. Тик бурчтуу тең капталдуу үч бурчтуктар окшош болоорун далилдегиле.
13. Үч бурчтуктун бардык орто сызыктары жүргүзүлгөн. Натыйжада берилген үч бурчтукка окшош болгон канча үч бурчтук түзүлдү?
14. Трапециянын негиздери a жана b. Анын диагоналдары кесилишкен чекитте кандай катыштарга бөлүнүшөт?
15. Үч бурчтуктун жактары 5 см, 7 см, 4 см. Ага окшош болгон үч бурчтуктун эң чоң жагы 21 см. Анын калган жактарын тапкыла.
16. Окшош эки көп бурчтуктун кичине жактары 35 см жана 21 см, ал эми алардын периметрлеринин айырмасы 40 см. Көп бурчтуктардын периметрлерин эсептегиле.

ПЛАНИМЕТРИЯ КУРСУ БОЮНЧА ТАТААЛЫРААК МАСЕЛЕЛЕР

1. Эгерде үч бурчтуктун биссектрисасы анын периметрин тең экиге бөлсө, анда берилген үч бурчтук тең капталдуу болоорун далилдегиле.
2. Параллелограммдын сыртына анын жактары боюнча квадраттар түзүлгөн. Алардын борборлору жаңы квадраттын чокулары болуп эсептелээрин далилдегиле.
3. Трапециянын негиздери a жана b. Анын негиздерине параллель болуп, каптал жактарынын арасында жаткан жана трапецияны аянттары барабар болгондой эки бөлүккө бөлүүчү кесиндинин узундугун тапкыла.
4. Үч бурчтуктун негизиндеги бурчтары α жана $\beta\,(\alpha>\beta)$ берилген. Негизинин каршысындагы чокудан түшүрүлгөн бийиктиктин жана ички бурчтун биссектрисасынын арасындагы бурчту тапкыла.
5. Үч бурчтуктун ортборбору кайсы чокусуна (жагына) жакын болот?
6. Үч бурчтуктун бийиктиктери берилген. Аянтын тапкыла.
7. Үч бурчтуктун медианалары берилген. Жактарын тапкыла.
8. Үч бурчтуктун жактары a, b, c берилген. Ортборборунан чокуларына чейинки аралыктарды тапкыла.
9. Үч бурчтуктун жактары a, b, c берилген. Сырттан сызылган айлананын борборунан жактарына чейинки аралыктарды тапкыла.
10. Радиусу R ге барабар болгон жарым тегеректин диаметрине туура үч бурчтук түзүлгөн. Анын жарым тегеректин сыртында жаткан бөлүгүнүн аянтын тапкыла.

11. Берилген тегеректин ичине берилген квадраттын аянтына барабар болгон тик бурчтукту түзгүлө.
Көрсөтмө. Тик бурчтуктун жактарын тегеректин радиусу жана квадраттын жагы аркылуу туюнткула.

12. Берилген периметри аркылуу берилген айланага ичтен сызылган тик бурчтукту түзгүлө.

13. Циркулдун жана сызгычтын жардамы менен 19° бурчту бирдей 19 бөлүккө бөлгүлө.

14. Циркулдун жана сызгычтын жардамы менен 7° бурчту бирдей 7 бөлүккө бөлгүлө.

15. Параллелограммдын тар бурчу 30° ка, диагоналдары c жана d га барабар $(c>d)$. Анын аянтын тапкыла.

16. Жагы a га барабар болгон квадраттын төрт чокусу радиустары a болгон төрт тегеректин борборлору болуп эсептелишет. Бул тегеректердин жалпы бөлүгүнүн аянтын тапкыла.
Көрсөтмө. Тиешелүү чиймени чийип, изделүүчү бөлүктүн аянтын x, квадраттын калган бөлүктөрүнүн аянттарын тиешелүү түрдө y жана z аркылуу белгилеп, алардын байланышын квадраттын, тегеректин төрттөн бир бөлүгүнүн жана калган бөлүктөрдүн аянттары аркылуу туюнткула.

XI *глава* СТЕРЕОМЕТРИЯ БОЮНЧА КЫСКАЧА МААЛЫМАТТАР

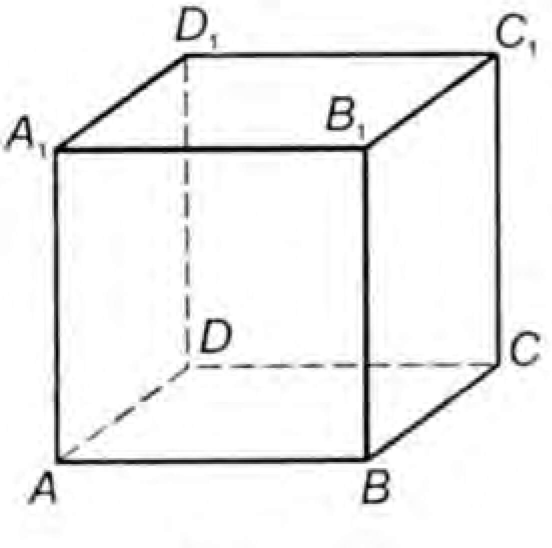
§ 58. КАЙЧЫЛАШ ТҮЗ СЫЗЫКТАР

Эки түз сызыкты мейкиндикте да кароого болот. Мисалы, кубдун кырлары боюнча аныкталган түз сызыктар мейкиндиктеги түз сызыктарды элестетет. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубунун бир эле AA_1BB_1 гранындагы (тегиздиктеги) өз ара кесилишүүчү, параллель жана перпендикулярдуу болушкан түз сызыктардын (кесиндилердин) түгөйлөрүн көрсөткүлө (158-сүрөт). Демек, тегиздикте эки түз сызык сөзсүз: *же кесилишет, же параллель*. Так-тап айтканда тегиздиктеги эки түз сызык мына ушул эки абалдын биринде гана болот. Ал эми мейкиндикте болсо өз ара кесилишпей турган, параллель да эмес, перпендикулярдуу да эмес эки түз сызыкты көрсөтүүгө болот (4-абал). Андай түз сызыктарды **кайчылаш** түз сызыктар дейбиз.

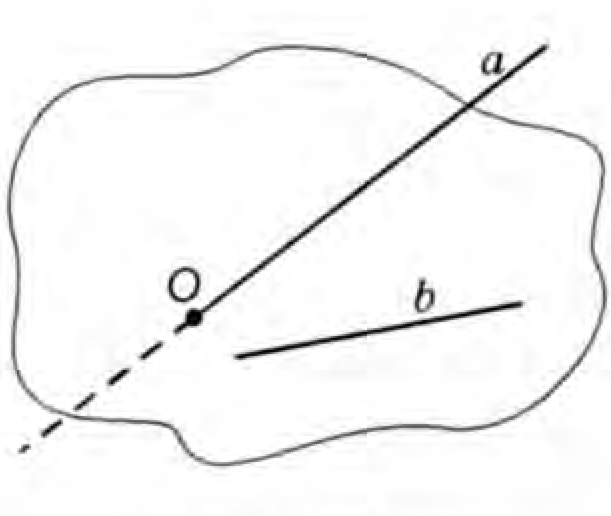
Мейкиндиктеги мындай түз сызыктар бир тегиздикте эмес, ар түрдүү тегиздиктерде жайланышат.

Мисалы, жогорудагы кубдун BC жана D_1C_1 кырлары аркылуу өткөн түз сызыктар да кайчылаш түз сызыктар болушат.

Жалпы учурда бизге α тегиздиги, анын O чекити жана ошол тегиздикте жаткан b түз сызыгы берилди дейли (159-сүрөт). a түз сызыгы α тегиздигин анын O чекити аркылуу кесип өтсүн. Анда a жана b түз сызыктары кайчылаш түз сызыктар болушат, анткени алар кесилишпейт жана бир тегиздикте жатышпайт.



158-сүрөт.



159-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Мейкиндикте кесилишүүчү, параллель, перпендикуляр түз сызыктарга мисалдар келтиргиле.
2. Класстык бөлмөдөгү параллель, перпендикуляр, кесилишүүчү жана кайчылаш түз сызыктарды көрсөткүлө.
3. 158-сүрөттө кубдун AB кырына кайчылаш түз сызыктарды көрсөткүлө. Белгилеп жазгыла. Канча кайчылаш түз сызык бар?
4. Кубдун: 1) BC жана A_1D_1; 2) BC жана CC_1 кырлары кандай түз сызыктарды аныктайт?

§ 59. АЙЛАНУУ ТЕЛОЛОРУ ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

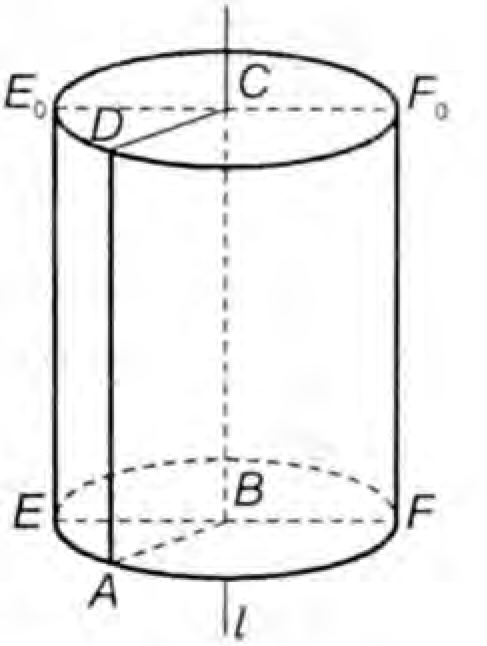
Геометриялык фигуралар мейкиндикте да берилет. Алардын айрымдары менен силер таанышсыңар. Мисалы: куб, тик бурчтуу параллелепипед, шар ж. б. Мейкиндикте аларды геометриялык телолор деп эсептешет. Демек, геометриялык телолор мейкиндиктин туюк жана чектелген бөлүгү катары каралат.

Эгерде кандайдыр жалпак фигураны анын тегиздикте жаткан l огунун айланасында айландырсак, анда мейкиндикте айлануу телосу пайда болот. Айлануу телолорунун айрымдарына токтолобуз.

59.1. ЦИЛИНДР

Аныктама. **Тик бурчтукту анын бир жагынын айланасында айландыруудан пайда болгон тело тик цилиндр[1] деп аталат.**

Эгерде $ABCD$ тик бурчтугун BC жагынын айланасында айландырсак, анда андан пайда болгон айлануу телосу цилиндрди аныктайт (160-сүрөт). Мында BC түз сызыгы же l айлануу огу цилиндрдин огу болуп эсептелет. BC кесиндиси цилиндрдин бийиктиги болот. Бул цилиндр тик тегерек цилиндр деп аталат. AD — цилиндрдин түзүүчүсү болуп эсептелет. CD жана BA кесиндилери октун айланасында айланууда барабар жана параллель тегеректерди аныктайт, B,C чекиттери алардын борбор-



160-сүрөт.

---

[1] Грек сөзү, «*айландыруу*» деген маанини түшүндүрөт.

лору болушат. Ал тегеректер цилиндрдин **негиздери** деп аталат, алардын радиустары цилиндрдин радиусун аныктайт.

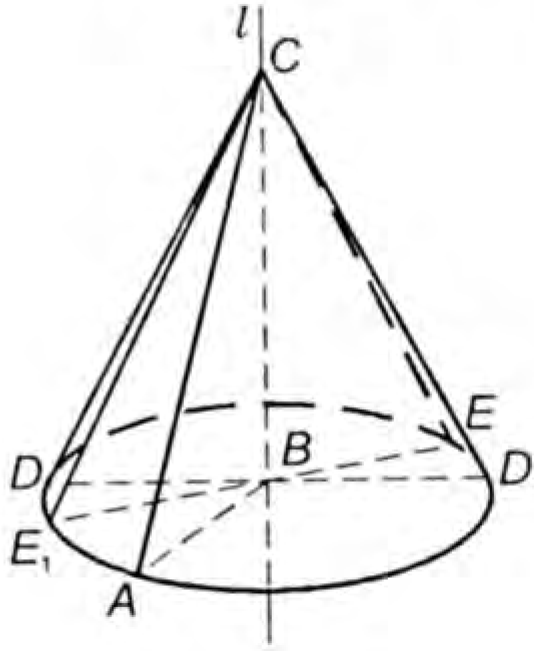
59.2. КОНУС

Аныктама. **Тик бурчтуу үч бурчтукту анын бир катетинин айланасында айландыруудан пайда болгон тело конус**[1] **деп аталат.**

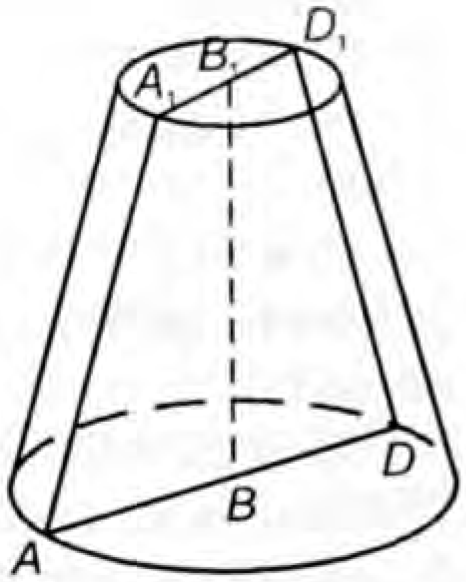
Эгерде ABC тик бурчтуу үч бурчтугун (AC — гипотенуза, AB, BC — катеттер) катетинин йланасында айландырсак, андан пайда болгон айлануу телосу конусту аныктайт (161-сүрөт). Мында BC катети аркылуу өткөн l түз сызыгы конустун айлануу огу же конустун огу деп аталат. Пайда болгон конус **тик тегерек конус** деп аталат.

AB катетин l огунун айланасында айландыруудан алынган тегерек конустун **негизин** аныктайт, анын радиусу AB катетине барабар. BC кесиндиси конустун огу болуп эсептелет.

ABB_1A_1тик бурчтуу трапециясын ($AB \perp BB_1$, $A_1B_1 \perp BB_1$) BB_1 огунун айланасында айландырсак, анда кесилген конус пайда болот (162-сүрөт). Радиустары AB, A_1B_1 болгон тегеректер кесилген конустун негиздери болот.



161-сүрөт.



162-сүрөт.

59.3. СФЕРА ЖАНА ШАР

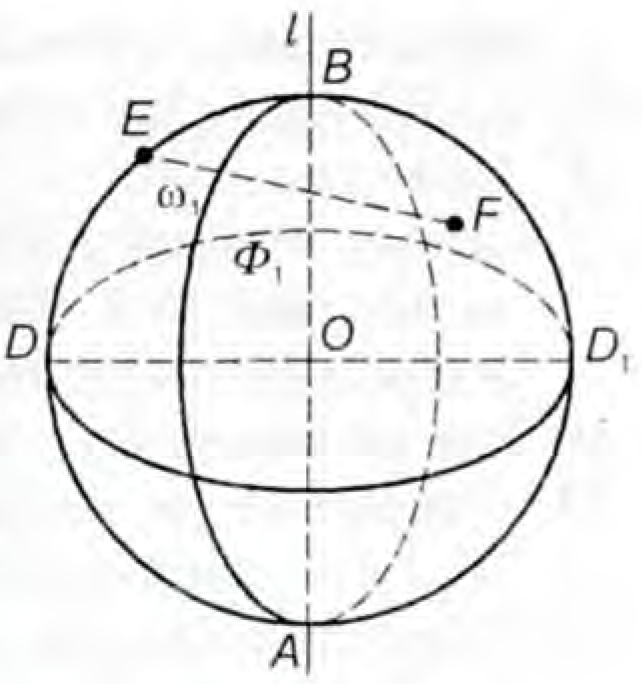
Сфера менен шар тыгыз байланышта. Адегенде шар жөнүндө баяндайбыз.

Жарым тегеректи анын диаметринин айланасында айландыруудан пайда болгон тело **шар** деп аталат.

---

[1] Грек сөзү, *«кайыңдын түспөлү»* дегенди түшүндүрөт.

Φ_1 жарым тегерегин AB диаметринин айланасында айландырганда шар алынат (163-сүрөт). AB диаметри аркылуу өткөн l түз сызыгын айлануу огу деп атайбыз. Шарды чектеп турган бет **сфера**[1] деп аталат. Ал сфераны ω_1 жарым айланасынын l огунун айланасында айландыруудан пайда болгон айлануу бети катарында да кароого болот.



163-сүрөт.

Сферанын борбору, радиусу, диаметри, огу, хордасы ал чектеп турган шардын да борбору (O), радиусу ($OA=R$), диаметри (AB), хордасы (EF) болот.

Шардын тегиздик менен кесилиши дайыма тегерек болот. Эгерде кесилишүүчү тегиздик шардын борбору аркылуу өтсө, анда кесилиште чоң тегерек алынат, анын радиусу шардын радиусуна барабар. Мисалы, чоң тегеректин айланасы глобустагы экватор жана меридиандар болуп эсептелет.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Цилиндрдин огу аркылуу өтүүчү тегиздик менен кесилиши кандай фигура болот?
2. Цилиндрдин огу аркылуу өтүүчү тегиздик менен кесилиши жагы 8 см болгон квадрат болсо, цилиндрдин радиусун жана түзүүчүсүн тапкыла.
3. Цилиндрдин октук кесилишинин диагоналы аны кандай үч бурчтуктарга бөлөт?
4. Жактары 6 см жана 10 см болгон тик бурчтуктун бир жагынын айланасында айланыудан алынган цилиндрдин диаметрин жана бийиктигин эсептегиле.
5. Конустун огу аркылуу өтүүчү тегиздик менен кесилиши кандай фигура болот?
6. Конустун түзүүчүсү: 1) анын бийиктигине; 2) негизиндеги айлананын радиусуна барабар болушу мүмкүнбү?
7. Конустун негизине параллель тегиздик менен кесилиши кандай фигура болот? Аны түзүп көрсөткүлө.
8. ABC тик бурчтуу үч бурчтугунда $AB=5$ дм, $BC=4$ дм, $CA=3$ дм. Берилген үч бурчтуктун: 1) CA катетинин; 2) BC катетинин

---

[1] Грек сөзү, «*топ*» дегенди түшүндүрөт.

айланасында айланышынан пайда болгон айлануу телосунун диаметрин, бийиктигин жана түзүүчүсүн тапкыла.

9. Бийиктиги 16 см, радиусу 12 см конус бийиктигинин тең ортосу аркылуу өтүп, негизине параллель болгон тегиздик менен кесилген. Кесилген конустун негиздеринин радиустарын жана бийиктигин тапкыла.
10. Сфера менен шардын айырмасын түшүндүрүп бергиле.
11. Сферанын тегиздик менен кесилиши кандай фигура болот?
12. Шардын тегиздик менен кесилиши кандай фигура болот?
13. Радиусу 8 см шарды тегиздиктер менен кескенде радиустары 2 см жана 3 см болгон тегеректер пайда болду. Алардын кайсынысы шардын борборуна жакын?
14. Шардын радиусу 10 дм болсо, анын чоң тегерегинин айланасынын узундугун тапкыла.

    Көрсөтмө. Айлананын узундугун $C=2\pi R$ формуласы аркылуу аныктагыла, мында C — айлананын узундугу, R — радиусу, $\pi \approx 3,14$ деп алгыла.

§ 60. КӨП ГРАНДЫКТАР ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

Көп грандыктар мейкиндиктеги геометриялык фигуралар (телолор) болушат. Алар бардык жагынан көп бурчтуктар менен чектелген фигуралар. Ал көп бурчтуктар грандары деп аталат. Көп грандыктын бир гранында жатпаган эки чокусун туташтыруучу кесинди анын диагоналы деп аталат. 164-сүрөттө көп грандык көрсөтүлгөн, анын диагоналы CF_1. Көп грандыктар ар кандай жана татаал болот. Биз аларды 11-класста кеңири карайбыз. Азырынча айрым гана жөнөкөй көп грандыктарга токтолобуз.

60.1. ТИК ПРИЗМА

Призма[1] эң жөнөкөй көп грандыктардын бири болуп эсептелет. Куб, учталбаган алты кырдуу карандаш ж. б. призмага мисал боло алышат.

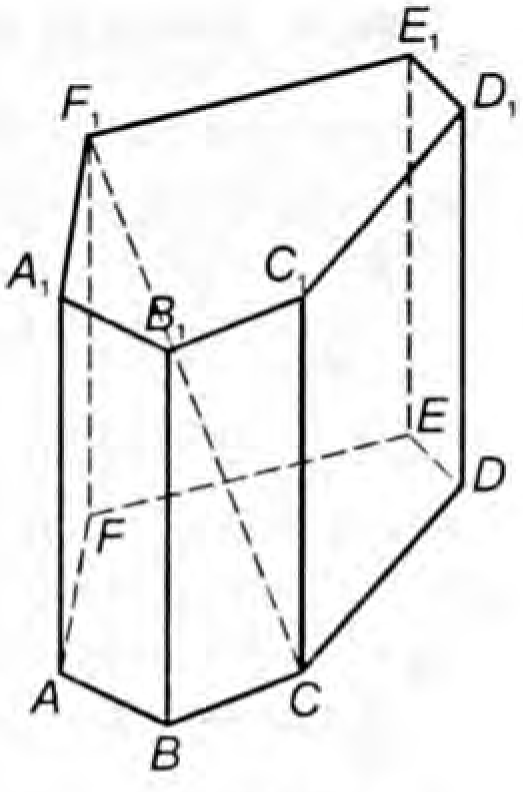
Негиздери деп аталуучу эки граны $ABCDEF$ жана $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ барабар көп бурчтуктар жана алардын тиешелүү жактары параллель, ал эми калган грандары тик бурчтуктар болушкан көп грандык **тик призма** деп аталат (164-сүрөт).

---

[1] Грек сөзү, *«кесилип алынган тело»* деген маанини түшүндүрөт. Байыркы термин.

$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмасында ABB_1A_1, BCC_1B_1,..., FAA_1F_1 тик бурчтуктары призманын каптал грандары, AA_1, BB_1, ..., EF_1 каптал кырлары деп аталат. Призманын каптал кырлары анын бийиктиги болуп эсептелет. Негизиндеги көп бурчтукка карата призма үч бурчтуу, төрт бурчтуу ж. у. с. болушу ыктымал. 164-сүрөттө 6 бурчтуу призма көрсөтүлгөн, CF_1 анын диагоналы.

Куб, тик бурчтуу параллелепипед призманын айрым түрлөрү болуп эсептелет, алар силерге мурдатан белгилүү.

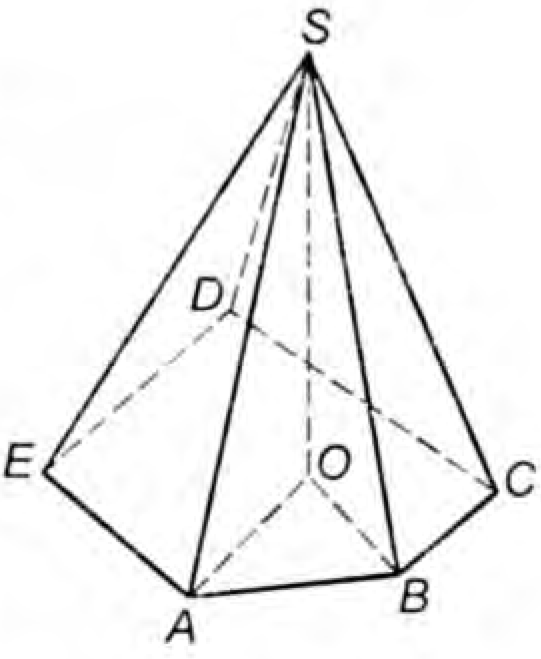


164-сүрөт.

60.2. ПИРАМИДА

Көп грандыктардын дагы бир жөнөкөй түрү болуп пирамида[1] эсептелет. Анын сүрөтү 165-сүрөттө көрсөтүлгөн.

Бир граны кандайдыр көп бурчтук, ал эми калган грандары жалпы чокулуу үч бурчтуктар болгон көп грандык **пирамида** деп аталат (165-сүрөт).



165-сүрөт.

Эгерде $ABCDE$ көп бурчтугун алып, анын чокуларын көп бурчтуктун тегиздигинен тышкары жаткан S чекити менен туташтырсак, пирамида пайда болот (165-сүрөт). Ал пирамиданы $SABCDE$ аркылуу белгилешет. Көп бурчтук пирамиданын негизи, SA, SB, ... каптал кырлары, ABC, ..., AES — үч бурчтуктары каптал грандары болушат.

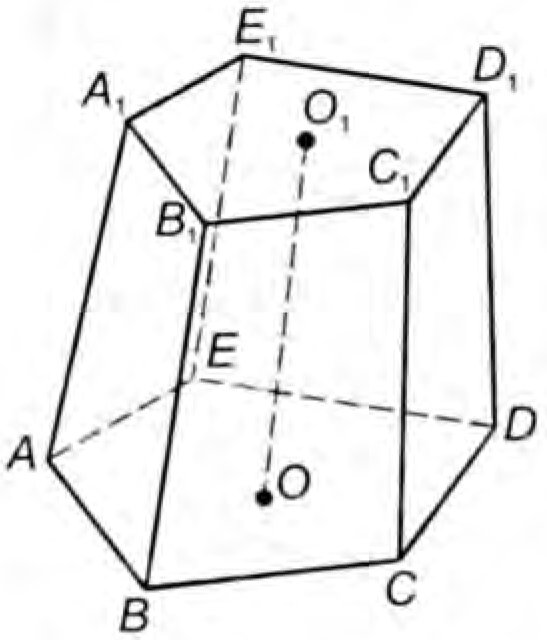
Эгерде SO кесиндиси AO жана BO кесиндилерине перпендикулярдуу, тактап айтканда пирамиданын негизинин тегиздигине перпендикулярдуу болсо, анда SO пирамиданын бийиктиги деп аталат.

Пирамиданын негизи үч бурчтук, төрт бурчтук ж. б. болсо, анда тиешелүү түрдө үч бурчтуу, төрт бурчтуу ж. б. пирамидага ээ болобуз. 165-сүрөттө беш бурчтуу пирамида көрсөтүлгөн.

---

[1] Грек сөзү. Томпок көп грандык деген мааниде. Египет тилинен алынган.

60.3. КЕСИЛГЕН ПИРАМИДА



166-сүрөт.

Эгерде $SABCDE$ пирамидасын негизине параллель болгон α тегиздиги менен кескенден пайда болгон $SA_1B_1C_1D_1E_1$ пирамидасын алып коюп, анын калган бөлүгүн өзүнчө карасак, ал да көп грандыкты аныктайт (165-сүрөт). Аны кесилген пирамида деп атайбыз. Демек, пирамиданын негизинин тегиздиги менен негизине параллель кесүүчү тегиздиктин арасында жаткан пирамиданын бөлүгү кесилген пирамида деп аталат (166-сүрөт).

$ABCDE$ жана $A_1B_1C_1D_1E_1$ көп бурчтуктары кесилген пирамиданын негиздери, ABB_1A_1, BCC_1B_1, ..., EAA_1E_1, төрт бурчтуктары — каптал грандары, AA_1, BB_1, ..., EE_1 — каптал кырлары, OO_1 — бийиктиги болот.

Толук пирамидадагыдай эле, кесилген пирамида да үч, төрт ж. б. бурчтуу болушу мүмкүн.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. 1) Үч бурчтуу; 2) төрт бурчтуу тик призманы сызгыла.
2. Сегиз гранга ээ болгон тик призманын: 1) негизи кандай көп бурчтук; 2) канча каптал граны болот?
3. Тик призманын каптал грандарынын саны менен негизиндеги көп бурчтуктун жактарынын санынын кандай байланышы бар?
4. Беш бурчтуу тик призманын канча чокусу, граны жана кыры бар?
5. Кубдун бир чокусунан чыккан кырларынын учтары аркылуу өтүүчү кесилишти түзгүлө.
6. Кубдун кыры a. Анын: 1) каптал гранынын диагоналын; 2) кубдун өзүнүн диагоналын тапкыла.
7. Тик бурчтуу параллелепипеддин: 1) карама-каршы кырлары; 2) карама-каршы грандары барабар экендигин далилдегиле.
8. Тик бурчтуу параллелепипеддин кырлары a, b, c. Диагоналын тапкыла.
9. Тик бурчтуу параллелепипеддин бардык диагоналдары барабар болоорун далилдегиле.

10. Эгерде тик бурчтуу параллелепипеддин үч өлчөмдөрү: 1) 2 м, 3 м, 6 м; 2) 3 дм, 6 дм, 12 дм болсо, диагоналын эсептегиле.

11*. Кырларынын саны 15 ке барабар болгон тик призма болобу?

12. 1) Үч бурчтуу; 2) төрт бурчтуу пирамиданы сызгыла. Чокуларын, кырларын, грандарын, негизин атагыла, белгилеп көрсөткүлө.

13. Беш бурчтуу пирамиданын канча чокусу, граны, кыры бар?

14. Пирамиданын чокусу жана негизинин диагоналы аркылуу өткөн тегиздик диагоналдык тегиздикти аныктайт. 1) Төрт бурчтуу пирамидада; 2) беш бурчтуу пирамидада канча диагоналдык кесилишти жүргүзүүгө болот? Чиймеде көрсөткүлө.

15. Пирамиданын бардык каптал кырлары l ге барабар, ал эми негизи a жактуу квадрат. Пирамиданын бийиктигин эсептегиле.

16. Төрт бурчтуу пирамиданын каптал кырлары l ге барабар, бийиктиги h, ал эми негизи тик бурчтук. Пирамиданын негизинин диагоналын тапкыла.

17. Кесилген төрт бурчтуу пирамиданын негиздери жактары 10 дм жана 2 дм болгон квадраттар, ал эми каптал кырлары 9 дм. Пирамиданын бийиктигин тапкыла.

18. Кесилген пирамиданын негиздери жактары 4 см жана 1 см болгон тең жактуу үч бурчтуктар, ал эми каптал кырлары 5 см. Ар бир гранынын периметрин тапкыла.

§ 61. МЕЙКИНДИКТЕГИ ЧЕКИТТИН КООРДИНАТАЛАРЫ

Мейкиндикте да чекиттин координаталарын аныктоого болот. Ал тегиздиктегиге окшош. Демек, мейкиндикте чекитти координаталар (сандар) аркылуу туюнтуп жазуу үчүн мейкиндиктеги координаталар системасын түзүү талап кылынат.

Мейкиндикте O чекитинде кесилишүүчү жана бири-бирине перпендикулярдуу болушкан Ox, Oy, Oz окторун алабыз (167-сүрөт). Алар координаталар октору деп аталат. Ox, Oy октору кандай аталаары белгилүү, Oz — апликата[1] огу деп аталат. O — координаталар башталышы болот.

Ар бир эки ок аркылуу тегиздик жүргүзүүгө мүмкүн, алар координата тегиздигин аныктайт. Демек, үч координаталар тегиздиги болот. Октор боюнча масштаб бирдиктерин тегиздиктегидей эле тандап алууга мүмкүн.

---

[1] Латын сөзү, *«тыгыз байланышкан»* деген маанини түшүндүрөт.

O — башталышы, октору, алар боюнча масштаб бирдиктери берилсе, анда *мейкиндикте тик бурчтуу координаталар системасы* аныкталган болот, аны кыскача $Oxyz$ аркылуу белгилейбиз.

Эми бул системада M чекити берилсе, ага туура келүүчү x, y, z үч санын, ал эми, тескерисинче, x, y, z сандары берилсе алар аркылуу аныкталуучу M чекитин таап алууга болот.

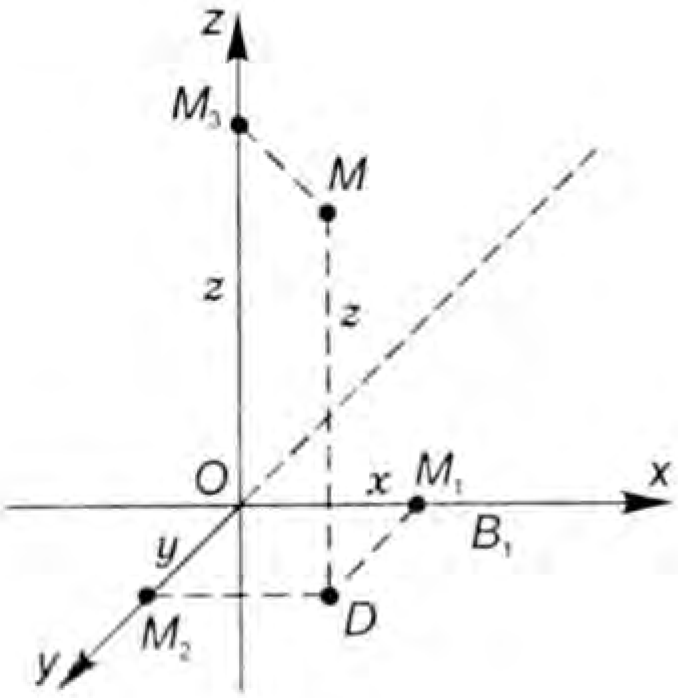
M чекити берилсе, ал аркылуу Oz огуна параллель түз сызык жүргүзүп анын xOy координата тегиздиги менен кесилишин табабыз, ал D чекити болот: $DM=OM_3=z$ деп белгилейбиз.

Эми D чекити аркылуу Ox, Oy окторуна параллель түз сызыктарды жүргүзүп, $M_1D=OM_2=y$, $M_2D=OM_1=x$ сандарын табабыз. Демек, M чекити аркылуу x, y, z сандары аныкталды.

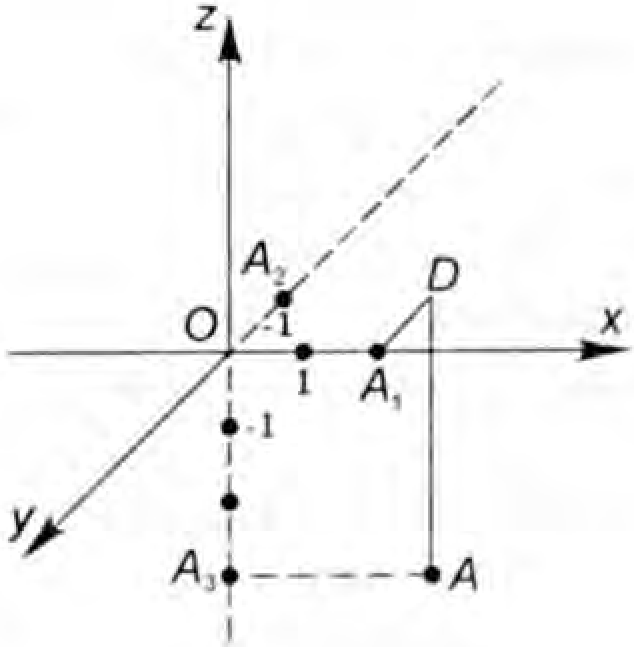
Эгерде x, y, z сандары берилсе, анда $x=OM_1$, $y=OM_2=M_1D$ (Oy ке параллель), $z=OM_3=DM$ (Oz ке параллель) кесиндилерин түзүп, M чекитин табабыз. Мында x, y, z сандарына карата M чекити табылды. Ар бир учурда масштаб бирдиктери жана x, y, z сандарынын белгилери эсепке алынышы керек. Бул учурда x, y, z сандары мейкиндикте M чекитинин координаталары деп аталат да, $M(x; y; z)$ аркылуу белгиленип жазылат.

Мисалы, $Oxyz$ системасында $A(2; -1; -3)$ чекитин түзөлү (168-сүрөт).

Ox огуна $OA_1=2$ бирдик кесиндисин өлчөп коюп, A_1 чекитине ээ болобуз. A_1 чекити аркылуу Oy огуна карама-каршы багытта параллель шоола сызып, ага $A_1D=1$ кесиндисин өлчөп коёбуз. D чекити аркылуу Oz ке карама-каршы багытта параллель шоола жүргүзүп, $DA=3$ кесиндисин түзөбүз. A изделүүчү чекит болот.



167-сүрөт.



168-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $Oxyz$ координаталар системасында $A(4;2;3)$; $B(-2;2;-2)$; $C(-3;1;2)$; $D(2;0;-3)$; $E(-2;-3;0)$; $F(5;0;0)$; $L(\frac{1}{2};3;-1)$ чекиттерин түзгүлө.
2. 1-маселедеги чекиттердин кайсынысы: 1) координаталар окторунда; 2) координаталар тегиздигинде жатат?
3. $Oxyz$ координаталар системасында: 1) $A(0;0;2)$; 2) $B(0;3;0)$; 3) $C(-3;0;0)$ чекити кайсы окто жатат? Аларды түзгүлө.
4. $Oxyz$ координаталар системасында: 1) $A(-2;0;1)$; 2) $B(3;-2;0)$; 3) $C(0;2;5)$ чекити кайсы координаталар тегиздигинде жатат?
5. $Oxyz$ координаталар системасында $E(-2;3;4)$ жана $F(2;-2;1)$ чекиттери берилген. EF кесиндисин түзгүлө.
6. $Oxyz$ координаталар системасында берилген $K(2;3;-4)$ чекити аркылуу координаталар тегиздиктеринин ар бирине параллель болуп жүргүзүлгөн тегиздик координаталар окторун кандай чекиттерде кесет?
7. Кубдун кыры 4 см. Бир чокусу $Oxyz$ координаталар системасынын O башталышы, ал чокудан чыгуучу кырлар координаталар окторунун оң багыттары менен дал келет. Кубдун чокуларынын координаталарын тапкыла.

§ 62. МЕЙКИНДИКТЕГИ ЭКИ ЧЕКИТТИН АРАЛЫГЫ. КЕСИНДИНИН ОРТОСУНУН КООРДИНАТАЛАРЫ

Тегиздикте xOy системасына карата $A(x_1; y_{1;})$ жана $B(x_2; y_2)$ чекиттери берилсе, алардын арасындагы аралык

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \quad (1)$$

формуласы аркылуу эсептеле тургандыгы белгилүү.

Тегиздикте берилген эки чекиттин арасындагы аралыкты табууга окшоштуруп, мейкиндиктин $Oxyz$ системасында $A(x_1; y_1; z_1)$ жана $B(x_2; y_2; z_2)$ чекиттери берилсе, алардын арасындагы аралыкты

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \quad (2)$$

формуласы аркылуу эсептөөгө болот. (2) формуланын толук чыгарылышына кийин токтолобуз.

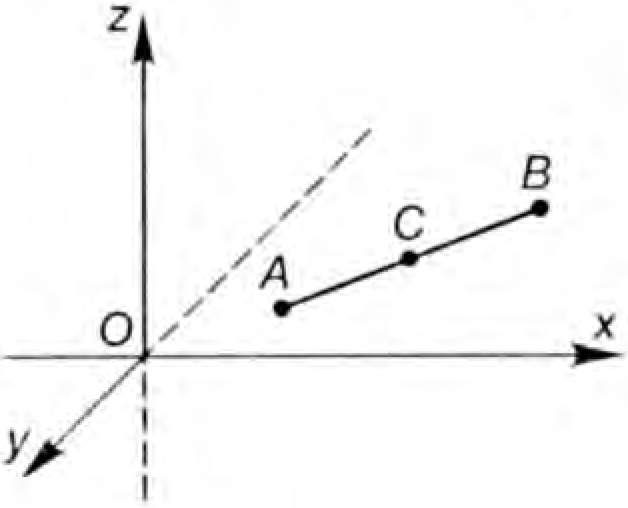
$A(x_1; y_1; z_1)$ жана $B(x_2; y_2; z_2)$ чекиттери менен чектелген AB кесиндисинин ортосунда жаткан $C(x_0; y_0; z_0)$ чекитинин координаталарын тегиздиктегиге окшоштуруп,

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ \ y_0=\frac{y_1+y_2}{2}\ ;\ \ z_0=\frac{z_1+z_2}{2} \qquad (3)$$

формуласы аркылуу эсептөөгө болот.

Чындыгында эле, AC жана CB аралыктарын (2) формуласы аркылуу эсептесек (169-сүрөт).

$$AC^2=(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1)^2+(\frac{y_1+y_2}{2}-y_1)^2+(\frac{z_1+z_2}{2}-z_1)^2=\frac{AB^2}{4} \qquad (4)$$



169-сүрөт.

же $AC=\frac{1}{2}AB$.

Ошондой эле $CB=\frac{1}{2}AB$ болот.

Бул шарттар качан гана C чекити AB кесиндисинин ортосунда жатканда туура, б. а.

$$C(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2};\ \frac{z_1+z_2}{2})$$

болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $Oxyz$ координаталар системасында $A(2;\ -3;\ 4)$ жана $B(-4;\ 5;\ 4)$ чекиттери берилген. AB аралыгын тапкыла.
2. $A(-3;\ -4;\ 3)$ жана $B(1;\ 4;\ 5)$ чекиттери берилген. 1) AB кесиндисинин ортосундагы C чекитинин координаталарын тапкыла; 2) AC жана CB кесиндилеринин узундуктарын эсептегиле; 3) алар AB кесиндисинин кандай бөлүгү болоорун көрсөткүлө.
3. ABC үч бурчтугунун чокулары $A(-5;\ 2;\ 4)$, $B(1;\ 6;\ -7)$, $C(3;\ -2;\ 8)$ болсун. Үч бурчтуктун: 1) периметрин; 2) AD медианасын тапкыла.
4. AB кесиндисинин башталышы $A(1;\ -3;\ 4)$, ал эми ортосу $C(3;\ -1;\ 1)$ болсо, B чекитинин координаталарын тапкыла.
5. $ABCB$ параллелограммынын $A(1;\ -3;\ 0)$, $B(-2;\ 4;\ 1)$, $C(-3;\ 1;\ 1)$ чокулары берилген. 1) Диагоналдарынын кесилишкен чекитин; 2) D чокусунун координаталарын; 3) BD диагоналын эсептегиле.

§ 63. МЕЙКИНДИКТЕГИ ТЕЛОЛОРДУН БЕТТЕРИНИН АЯНТТАРЫ ЖӨНҮНДӨ МААЛЫМАТТАР

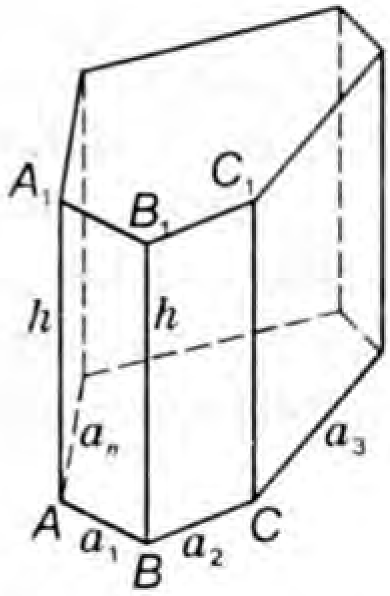
Мейкиндиктеги жөнөкөй телолордун беттеринин аянттарын эсептейбиз. Ал тегиздиктеги фигуралардын аянттарын табууга негизделген.

63.1. ТИК ПРИЗМАНЫН БЕТИНИН АЯНТЫ

Тик призма берилип, негизинин жактары $a_1, a_2, ..., a_n$, бийиктиги h болсун (170-сүрөт). Бул призманын ар бир каптал граны тик бурчтук, ал тик бурчтуктардын аянттарынын суммасы призманын каптал бетинин аянтын аныктайт:

$$S_{к.б.}=a_1h+a_2h+...+a_nh=(a_1+a_2+...+a_n)h=P\cdot h, \quad (1)$$

$S_{к.б}$ — каптал бетинин аянты, P — негизинин периметри. Демек, **тик призманын каптал бетинин аянты анын негизинин периметрин бийиктигине көбөйткөнгө барабар.**



170-сүрөт.

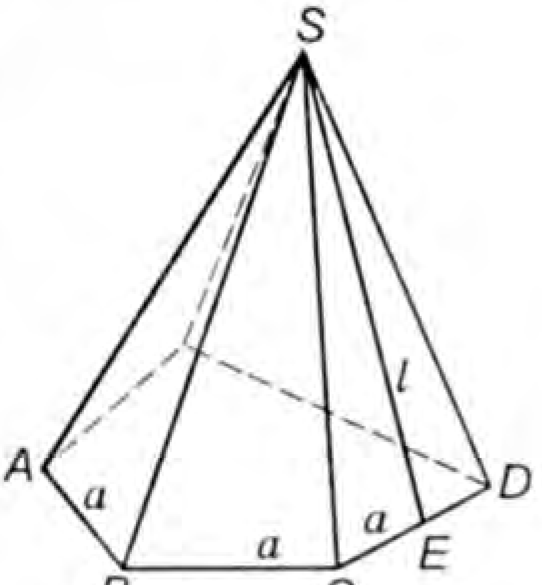
Ал эми тик призманын бетинин же толук бетинин аянтын табыш үчүн каптал бетинин аянтына негиздеринин аянттарын кошобуз:

$$S_{т.б.}=S_{к.б}+2S_н. \quad (2)$$

$S_{т.б.}$ — призманын толук бетинин аянты, $S_{н.}$ — негизинин аянты.

63.2. ПИРАМИДАНЫН БЕТИНИН АЯНТЫ

Пирамиданын каптал грандары үч бурчтуктар, ал эми негизи көп бурчтук боло тургандыгы белгилүү. Пирамиданын каптал бетиндеги үч бурчтуктардын (каптал грандарынын) аянттарынын суммасы анын каптал бетинин аянтын аныктайт.



171-сүрөт.

Пирамиданын негизи туура көп бурчтук, ал эми каптал кырлары барабар болгон пирамиданы карайлы. Ал туура n бурчтуу пирамида деп аталат. Анын негизинин жагы a, каптал гранынын S чокусунан түшүрүлгөн бийиктиги l болсун. $SE=l$, $AB=a$, SE бийиктиги пирамиданын **апофемасы** деп аталат (171-сүрөт).

Бул пирамиданын каптал гранындагы бир үч бурчктун аянты $\frac{1}{2}a\cdot l$ болот. Анда анын каптал бетинин аянты

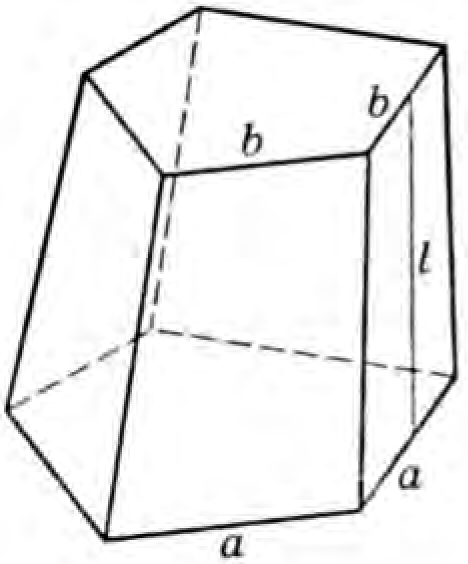
$$S_{кб.}=\frac{1}{2}a\cdot n\cdot l \text{ же } S_{кб.}=\frac{1}{2}P\cdot l. \quad (3)$$

Туура пирамиданын каптал бетинин аянты негизинин периметринин жарымын апофемасына көбөйткөнгө барабар. Пирамиданын толук бетинин аянты каптал бетинин аянты менен негизинин аянтынын суммасына барабар.

$$S_{т.б.}=S_{к.б.}+S_{н.}\,. \qquad (4)$$

$S_{н.}$ — негизинин аянты, аны аныктоо белгилүү.

Кесилген n бурчтуу туура пирамиданын негиздеринин жактары a, b апофемасы l болсун (172-сүрөт). Анын каптал грандары тең капталдуу трапециялар болушат. Алардын аянттарынын суммасы кесилген пирамиданын каптал бетинин аянтын аныктайт.



172-сүрөт.

Бир трапециянын аянты $\frac{a+b}{2}\cdot l$ болоору белгилүү. Анда кесилген пирамиданын каптал бетинин аянты

$$S_{к.б.}=\frac{a+b}{2}\cdot l\cdot n \text{ же } S_{к.б.}=\frac{P_1+P_2}{2}\cdot l\,, \qquad (5)$$

мында P_1, P_2 — негиздеринин периметрлери.

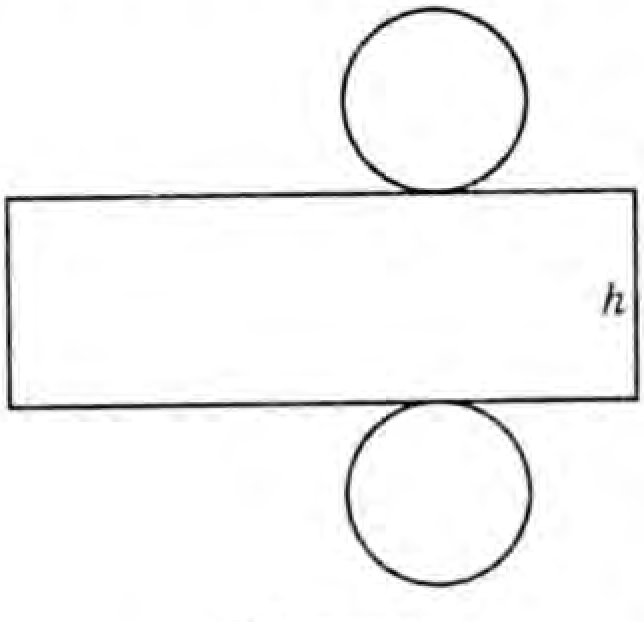
Кесилген пирамиданын негиздеринин аянттары $S_{1н.}$ жана $S_{2н.}$ болсо, толук бетинин аянты

$$S_{т.б.}=S_{к.б.}+S_{1н.}+S_{2н.} \qquad (6)$$

болот.

63.3. ЦИЛИНДРДИН БЕТИНИН АЯНТЫ

Цилиндрдин негиздери барабар тегеректер экендиги белгилүү. Эгерде цилиндрдик бетти бир түзүүчүсү боюнча кесип, анын жайылмасын түзсөк, анда 173-сүрөттөгүдөй болот. Мында тик бурчтук цилиндрдин каптал бетин, ал эми тегеректер болсо анын негиздерин аныктайт. Цилиндрдин радиусу R, бийиктиги h болсо, тик бурчтуктун бир жагы цилиндрдин негизинин айланасынын узундугуна, экинчи жагы цилиндрдин бийиктигине барабар. Анда тик бурчтуктун аянты цилиндрдин каптал бетинин аянтына барабар:



173-сүрөт.

$$S_{ц.}=2\pi\cdot R\cdot h\,. \qquad (7)$$

Ал эми толук бетинин аянты

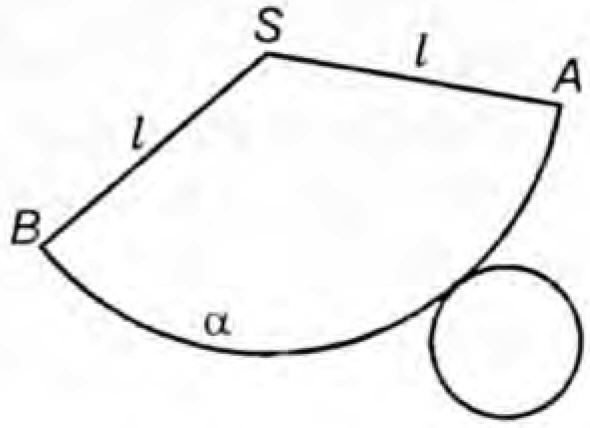
$$S_{ц.б.}=S_{ц.к.б.}+2S_{н.}=2\pi\cdot R\cdot h+2\pi\cdot R^2$$

же

$$S_{ц.б.}=2\pi\cdot R(h+R) \qquad (8)$$

болот.

63.4. КОНУСТУН БЕТИНИН АЯНТЫ



174-сүрөт.

Эгерде конустук бетти бир түзүүчүсү боюнча кесип анын жайылмасын түзсөк, 174-сүрөттө көрсөтүлгөндөй, тегеректин секторуна жана тегерекке ээ болобуз. Конустун түзүүчүсү l, радиусу R болсун. $SA=l$ — сектордун радиусу, $\angle ASB=\alpha$ болот.

Бул учурда конустун каптал бетинин аянты SAB секторунун аянтына барабар болот

$$S_{к.б.}=S_{сек.}=\frac{\pi l^2\alpha}{360°}. \tag{9}$$

AB жаасынын узундугу $m=\frac{\pi l\alpha}{180°}$ болоору белгилүү. Ошондуктан (9) дан

$$S_{к.б.}=\frac{\pi l^2\alpha}{360°}=\frac{\pi l\alpha}{180°}\cdot\frac{l}{2}=m\cdot\frac{l}{2}, \tag{10}$$

бирок, AB жаасынын узундугу конустун негизинин айланасынын узундугун аныктайт. Анда $m\approx 2\pi R$ болот. Ошентип, конустун каптал бетинин аянты

$$S_{к.б.}=\pi Rl \tag{11}$$

болот. Натыйжада конустун толук бетинин аянты

$$S_{т.б.}=\pi Rl+\pi R^2 \tag{12}$$

болот.

Кесилген конустун каптал бетинин аянтын негиздеринин радиустары R жана r, түзүүчүлөрү $l+l_1$ жана l_1 болгон эки толук конустун каптал беттеринин аянттарынын айырмасы катарында табууга болот. Натыйжада кесилген конустун каптал бетинин аянтын эсептөөдө

$$S_{к.к.к.б.}=\pi(R+r)l \tag{13}$$

формуласын пайдаланууга мүмкүн. Эми кесилген конустун толук бетинин аянты

$$S_{т.б.}=\pi(R+r)l+\pi R^2+\pi r^2 \tag{14}$$

формуласы аркылуу аныкталат.

63.5. ШАРДЫН БЕТИНИН (СФЕРАНЫН) АЯНТЫ

Цилиндрге же конуска окшоштуруп, алардын жайылмасын түзүү мүмкүн эмес. Ошондуктан шардын бетинин аянтын аныктай тургандай формуланы табуу кошумча түшүнүктөрдү талап кылат. Ага кийинчерээк, 11-класста токтолобуз. Азырынча шардын бетинин (сферанын) аянтын табуунун төмөндөгүдөй даяр формуласынан пайдаланабыз:

$$S_{б.а.}=4\pi R^2, \qquad (15)$$

мында R — шардын радиусу.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Кубдун кыры 5 дм. Бетинин аянтын тапкыла.
2. Кубдун каптал гранынын диагоналы 8 см. Бетинин аянтын тапкыла.
3. Кубдун бетинин аянты 54 м^2. Кубдун кырын эсептегиле.
4. Тик бурчтуу параллелепипеддин үч өлчөмү: 1) 2 см, 4 см, 8 см; 2) 1,5 дм, 4 дм, 4,5 дм. Бетинин аянтын эсептегиле.
5. Тик бурчтуу параллелепипеддин негизинин жактары 5 м жана 3 м, ал эми бийиктиги 6,5 м болсо: 1) каптал бетинин аянтын; 2) толук бетинин аянтын эсептегиле.
6. Кубдун диагоналы d. Бетинин аянтын аныктагыла.
7. Кубдун бетинин аянты S. 1) Кырын; 2) диагоналын тапкыла.
8. Тик бурчтуу параллелепипеддин каптал бетинин аянты 48 см^2, бийиктиги 4 см, негиздеринин аянттары 16 см^2 болсо, негизинин жактарын тапкыла.
9. Беш бурчтуу тик призманын негизинин жактары 1,5 м, 2,5 м, 3 м, 1 м, 5 м, ал эми бийиктиги 6 м болсо, каптал бетинин аянтын эсептегиле.
10. Негизи параллелограмм болгон тик призманын бийиктиги 12 дм, негизинин жактары 6 дм жана 4 дм. Параллелограммдын тар бурчу 30° Призманын: 1) каптал бетинин аянтын; 2) толук бетинин аянтын тапкыла.
11. Тик призманын негизи ромб, бийиктиги 8 дм. Ромбдун диагоналдары 6 дм жана 8 дм. Призманын: 1) каптал бетинин аянтын; 2) толук бетинин аянтын эсептегиле.
12. Туура төрт бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 12 см, каптал кыры 10 см. Пирамиданын бетинин аянтын тапкыла.
13. Туура үч бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 16 дм, апофемасы 5 дм. Анын толук бетинин аянтын эсептегиле.

14. Туура алты бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 3 м, апофемасы 4 м. 1) каптал бетинин; 2) толук бетинин аянтын тапкыла.

15. Кесилген туура төрт бурчтуу пирамиданын негиздеринин жактары 4 см жана 2 см, апофемасы 3 см. Пирамиданын: 1) каптал бетинин аянтын; 2) толук бетинин аянтын эсептегиле.

16. Цилиндрдин: 1) бийиктигин үч эсе чоңойтсок; 2) негизинин радиусун эки эсе чоңойтсок, анда каптал бетинин аянты кандай өзгөрөт?

17. Цилиндрдин: 1) радиусу 1,2 дм, бийиктиги 2,5 дм; 2) диаметри 20 см, бийиктиги 14 см. Бетинин аянтын эсептегиле.

18. Цилиндрдин жайылмасында тегеректердин ар биринин аянты 25,2 см^2, тик бурчтуктун аянты 62,8 см^2. Цилиндрдин радиусун жана бийиктигин тапкыла.

19. Цилиндрдин октук кесилишиндеги квадраттын жагы a га барабар. Цилиндрдин бетинин аянтын аныктагыла.

20. Эгерде конустун: 1) түзүүчүсүн эки эсе чоңойтсок; 2) радиусун үч эсе кичирейтсек, анда конустун каптал бетинин аянты кандай өзгөрөт?

21. Конустун түзүүчүсү l, радиусу R, бийиктиги h болсун. Эгерде: 1) l=16 см, R=4 см, 2) l=1,5 см, h=1 см, 3) h=24 см, R=15 см болсо, конустун бетинин аянтын тапкыла.

22. Катеттери 0,8 дм, 0,6 дм болгон тик бурчтуу үч бурчтук чоң катетинин айланасында айланат. Айлануудан пайда болгон беттин аянтын эсептегиле.

23. Кесилген конустун негиздеринин радиустары 5 см жана 2 см, ал эми тузүүчүсү 10 см. Конустун: 1) каптал бетинин аянтын; 2) толук бетинин аянтын эсептегиле.

24. Негиздери 20 см жана 14 см, ал эми бийиктиги 4 см болгон тең капталдуу трапеция негиздеринин тең ортосу аркылуу өтүүчү октун айланасында айланат. Айлануудан пайда болгон телонун: 1) каптал бетинин аянтын; 2) толук бетинин аянтын аныктагыла.

25. Шардын радиусу: 1) 8 см; 2) 5 дм болсо, бетинин аянтын эсептегиле.

26. Шарлардын радиустары 5 см жана 2,5 см. Алардын беттеринин аянттарынын катышын тапкыла.

27. Жердин радиусу болжол менен 6400 км. Жердин бетинин: 1) аянтын эсептегиле; 2) 30% и кургактыкты түзсө, кургактыктын аянтын эсептегиле.

§ 64. МЕЙКИНДИКТЕГИ ТЕЛОЛОРДУН КӨЛӨМДӨРҮ ЖӨНҮНДӨ МААЛЫМАТТАР

Түз сызыкта кесиндинин узундугун, тегиздикте фигуранын аянтын өлчөгөндөй эле, мейкиндиктеги фигуранын (телонун) көлөмүн өлчөөгө болот. Көлөм жөнүндөгү түшүнүктөр да турмуштук керектөөлөрдөн келип чыккан (мисалы, идиштин көлөмүн билүү, бөлмөнүн көлөмүн аныктоо ж. б.). Телонун көлөмү мейкиндикте чоңдукту мүнөздөйт. Ар кандай чоңдукту мүнөздөө үчүн бирдик тандалып алынат. Ошондуктан көлөмдү өлчөө үчүн көлөмдүн бирдигин тандап алуу керек.

Кырынын узундугу бирдик кесиндиге барабар болгон кубду бирдик куб деп аташат. Бул бирдик кубдун көлөмү көлөмдүн бирдиги катары кабыл алынат.

Мейкиндиктеги фигуранын (телонун) көлөмүн табуу үчүн ал телодо канча бирдик куб бар экендигин аныктоо керек. Ал оң сан аркылуу туюнтулат.

Жалпы учурда, мейкиндиктеги F фигурасына (телосуна) анын көлөмү деп аталуучу V оң саны туура келтирилет жана ал төмөндөгүдөй касиеттерге ээ:

1) Барабар фигуралардын көлөмдөрү барабар.

2) Эгерде фигура бөлүктөргө бөлүнсө, анда анын көлөмү алынган бөлүктөрдүн көлөмдөрүнүн суммасына барабар.

Көлөмдүн тандалып алынган бирдигинде ар кандай тело үчүн анын көлөмү деп аталуучу санды аныктоого болот. Ал суроого биз 11-класста кеңири токтолобуз. Жөнөкөй телолордун көлөмүн аныктоонун даяр формулалары төмөнкүлөр.

64.1. ТИК ПРИЗМАНЫН КӨЛӨМҮ

Тик бурчтуу параллелепипеддин көлөмү

$$V=a\cdot b\cdot c \qquad (1)$$

формуласы менен аныктала тургандыгы 6-класстан эле белгилүү, мында a, b, c анын үч өлчөмү. (1) формуланы

$$V=S\cdot h \qquad (2)$$

түрүндө жазууга да мүмкүн, мында $S=a\cdot b$ параллелепипеддин негизинин аянты, h — бийиктиги. Параллелепипед призманын бир түрү экендиги белгилүү. (2) формула каалагандай тик призма үчүн да туура болот, мында S тик призманын негизинин аянты болот. Демек, **тик призманын көлөмү анын негизинин аянтын бийиктигине көбөйткөнгө барабар.**

64.2. ПИРАМИДАНЫН КӨЛӨМҮ

Пирамиданын негизинин аянты $S_н$, бийиктиги h болсо, анын көлөмү

$$V = \frac{1}{3}S_н \cdot h \tag{3}$$

формуласы менен аныкталат. Демек, пирамиданын көлөмү анын негизинин аянтынын бийиктигине көбөйтүндүсүнүн үчтөн бирине барабар. Кесилген пирамиданын көлөмү

$$V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) \cdot h \tag{4}$$

формуласы аркылуу аныкталат, мында S_1 жана S_2 — пирамиданын негиздеринин аянттары, h — пирамиданын бийиктиги.

64.3. ЦИЛИНДРДИН КӨЛӨМҮ

Цилиндрдин негизинин радиусу R болсо, анда негизинин аянты $S=\pi R^2$ болот. Тик призманын көлөмүн аныктоого окшоштуруп, цилиндрдин көлөмүн

$$V=S \cdot h$$

же

$$V=\pi R^2 h \tag{5}$$

формуласы аркылуу аныктоого болот. Демек, цилиндрдин көлөмү анын негизинин аянтын бийиктигине көбөйткөнгө барабар.

64.4. КОНУСТУН КӨЛӨМҮ

Конустун негизинин радиусу R, бийиктиги h болсо, анын негизинин аянты $S=\pi R^2$ (тегеректин аянты) болот. Конустун көлөмү негизинин аянтынын бийиктигине көбөйтүндүсүнүн үчтөн бирине барабар.

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h$$

же

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h \tag{6}$$

Конустун көлөмүнүн формуласы пирамиданын көлөмүнүн формуласына окшош, ошондой эле (3) жана (6) формулалар да окшош. Андай болуп калышы бекеринен эмес. Анткени, конустун негизинин ичине туура көп бурчтукту сызып, анын чокуларын конустун чокусу менен туташтырсак туура пирамида алынат, ал пирамиданын жактарынын санын чоңойткондо конус пирамидага окшоп калат.

Кесилген конустун көлөмү

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R\cdot r + r^2) \qquad (7)$$

формуласы аркылуу табылат, мында R жана r кесилген конустун негиздеринин радиустары, h — кесилген конустун бийиктиги. (4) жана (7) формулаларды салыштырып көргүлө.

64.5. ШАРДЫН КӨЛӨМҮ

Радиусу R ге барабар шардын көлөмү

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (8)$$

формуласы аркылуу эсептелинет.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Кубдун кыры 4 см. Көлөмүн тапкыла.
2. Тик бурчтуу параллелепипеддин үч өлчөмү 4 м, 2 м жана 6 м. Көлөмүн эсептегиле.
3. Тик призманын негизи тик бурчтуу үч бурчтук, бийиктиги 9 дм. Эгерде тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери 6 дм жана 8 дм болсо, призманын көлөмүн тапкыла.
4. Тик призманын негизи жактары 10 см жана 6 см, арасындагы бурчу 60° болгон параллелограмм. Призманын бийиктиги 12 см болсо, анын көлөмүн эсептегиле.
5. Жагы 8 м, тар бурчу 30° болгон ромб тик призманын негизи болуп эсептелет. Ал тик призманын көлөмү 128 $м^2$ болсо, бийиктигин тапкыла.
6. Туура төрт бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 6 см, бийиктиги 9 см. Пирамиданын көлөмүн эсептегиле.
7. Негизинин жагы 8 дм, бийиктиги 12 дм болгон туура: 1) үч; 2) алты бурчтуу пирамиданын көлөмүн эсептегиле.
8. Негизинин жагы a, бийиктиги h болгон туура: 1) үч; 2) төрт; 3) алты бурчтуу пирамиданын көлөмүн аныктагыла.
9. Жактары 4 м жана 3 м болгон тик бурчтук пирамиданын негизи болуп эсептелет. Пирамиданын каптал кырлары барабар, ал эми көлөмү 20 $м^3$ болсо, пирамиданын бийиктигин эсептегиле.
10. Кесилген туура төрт бурчтуу пирамиданын негиздеринин жактары 6 см жана 2 см, ал эми бийиктиги 15 см. Анын көлөмүн эсептегиле.

11. Эгерде цилиндрдин: 1) бийиктиги үч эсе чоңойсо; 2) радиусу эки эсе чоңойсо, анын көлөмү кандай өзгөрөт?

12. Цилиндрдин: 1) радиусу 4 см, бийиктиги 5 см; 2) диаметри 10 дм, бийиктиги 8 дм болсо, анын көлөмүн эсептегиле.

13. Цилиндрдин негизинин айланасынын узундугу C, бийиктиги h болсо, анын көлөмүн тапкыла.

14. 13-маселеде c=6,28 дм, h=5 дм болсо, цилиндрдин көлөмүн тапкыла.

15. Цилиндрдин радиусу 5 см, көлөмү 628 см^3 болсо, анын бийиктигин эсептегиле.

16. Конустун түзүүчүсү l, радиусу R, бийиктиги h болсун. Эгерде: 1) l=1,6 дм, R=4 см; 2) l=15 см, h=10 см; 3) h=2,4 дм, R=15 см болсо, конустун көлөмүн эсептегиле.

17. Конустун түзүүчүсү анын тегиздигине 45° менен жантайган. Конустун радиусу 12 дм болсо, анын көлөмүн тапкыла.

18. Конустун радиусу 6 см, көлөмү 376,8 см^3 болсо, конустун бийиктигин аныктагыла.

19. Кесилген конустун негиздеринин радиустары 9 см жана 1 см, ал эми бийиктиги 6 см. Кесилген конустун көлөмүн тапкыла.

20. Эгерде шардын радиусу: 1) 2,5 см; 2) 8 дм; 3) 1 м; 4) 1,5 дм болсо, анын көлөмүн эсептегиле.

21. Шардын радиусун үч эсе чоңойтсок, көлөмү кандай өзгөрөт?

22. Эки шардын радиустары 6 см жана 3 см болсо, алардын көлөмдөрүнүн катышын эсептегиле.

1. ГЕОМЕТРИЯНЫН АЛГАЧКЫ ТАРЫХЫ ЖӨНҮНДӨ КЫСКАЧА МААЛЫМАТТАР

Ар кандай илимдин өнүгүш тарыхы дайыма фактылардан башталат, ал конкреттүү фактылардын топтолушуна жараша илимдин өзүнүн закондору жана теориялары иштелип чыгат да, кыйла узак убакыттан кийин калыптанган бир системага түшүрүлөт. Геометрия да дал ушундай жол менен өсүп өнүктү.

Геометриянын пайда болгон күнүн, айын же жылын так көрсөтүү мүмкүн эмес. Анткени геометрия башка бардык илимдердей эле, адамдардын турмуштук керектөөлөрүнөн келип чыккан. Ал керектөөлөр айрым геометриялык түшүнүктөр менен мүнөздөлгөн. Бул түшүнүктөр кылымдар бою топтолуп, кийин бир калыпка түшкөн, системалашкан. Эми геометрия өзүнчө илим болуп түзүлгөнгө чейинки айрым фактыларга токтололу.

Геометриянын алгачкы элементтери адегенде Вавилондо жана Египетте пайда болгон. Египеттиктерде көбүнчө жерди өлчөөнүн негизинде келип чыккан. Биздин египеттик математика менен тааныштыгыбыз азыркы эрага чейинки 2000—1700-жылдарда жазылып калтырылган байыркы кол жазмаларга негизделген. Ал кол жазмаларды, эстеликтерди изилдөө менен египеттиктердин ошол кезде эле тик бурчтуктун, үч бурчтуктун, трапециянын аянттарын аныктай билишкенине ынанабыз. Аянттын бирдиги үчүн алар жагынын узундугу бирге барабар болгон квадратты алышкан. Фигуралардын окшоштугу жөнүндө да элестери болгон. Ал гана эмес кесилген туура пирамиданын көлөмүн да азыркыдай так формула менен аныкташкан. Геометрияны өнүктүрүүдө вавилондуктар египеттиктерден кем калышкан эмес. Вавилондуктар геометриялык айрым маселелерди алгебраны колдонуп чечишкен.

Бирок Египеттин экономикасынын кийинчерээк өспөй төмөндөп кетиши геометриянын бул өлкөдө андан ары өнүгүшүнө тоскоолдук кылган. Ошондуктан жалпы эле математикалык маданияттын борбору акырындык менен Египеттен Грецияга өтө баштайт. Биздин эрага чейинки VII—VI кылымдарда Грецияда шаардык курулуштардын, деңизде сүзүүнүн өнүгүшү астрономиянын, физиканын алгачкы түшүнүктөрүнүн пайда болушу байкалат. Мунун өзү кыйла так өлчөөлөрдү талап кылган. Ошондуктан геометриялык татаал маселелерди чыгарууга туура келген.

Мындай маслелерди чыгарууга мурда колдонулуп келген геометриялык жөнөкөй ыкмалар жетишсиздик кылган. Ошондуктан геометрияны теориялык жактан негиздөө зарылдыгы келип чыккан.

Бул милдетти ишке ашырууну Фалестин мектеби колго алган. Аталган мектеп байыркы грек илимин жана философиясын негиздөөчү Фалес Милетскийдин (биздин эрага чейинки 624—547-жылдар) ысымына байланыштуу. Бул мектепте геометрия негизги изилдөөлөрдүн катарында турган. Ошентип, геометрия гректик философтор тарабынан акырындык менен илимге айланып, анын айрым сүйлөмдөрү теорема катарында логикалык түрдө далилдене баштаган. Азыр мектептин геометрия курсунда далилденип жүргөн айрым теоремалар ошол кезде эле Фалес тарабынан далилденген деп эсептешет. Андай теоремалардын катарына төмөндөгүлөр кирет:

1) Жарым айланага ичтен сызылган бурч тик бурч болот.

2) Вертикалдык бурчтар барабар.

3) Тең капталдуу үч бурчтуктун негизиндеги бурчтары барабар.

4) Үч бурчтук бир жагы жана ага жанаша жаткан эки бурчу боюнча аныкталат.

Грецияда геометриянын андан ары өнүгүшү Пифагор Самосскийге (б. э. чейинки 580—500-жылдар) жана анын мектебине байланыштуу. Геометриялык ачылыштардын көбү Пифагордук мектепке таандык. Атап айтканда:

1) Үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы жөнүндөгү теорема.

2) Квадраттык теңдеменин геометриялык жол менен чыгарылышы.

3) Пифагордун теоремасы.

Бул мектепте геометрия менен алгебранын байланышына чоң көңүл бурулган. Пифагордук мектептеги «өлчөнүлбөй турган кесиндилердин» бар экендигинин ачылышы геометриянын андан аркы өнүгүшү үчүн чоң мааниге ээ болду. Ага чейин ар кандай эки кесиндинин катышы рационалдуу сан менен туюнтулат деп келишкен. Анын туура эмес экендиги далилденди. Каалагандай кесиндини өлчөө үчүн рационалдуу сандардын жетишсиз экендиги ачылган. Демек, иррационалдуу сан жөнүндө түшүнүккө өтүү зарылдыгы пайда болгон.

Биздин эрага чейинки VI—III кылымдарда грек окумуштуулары Демокриттин (б.э.ч. 460—370-ж. ж.), Платондун (б. э. ч. 429—348-ж.ж.), Аристотелдин (б. э. ч. 384—322-ж. ж.) геометрия боюнча ачылыштары да геометриянын андан ары өнүгүшүнө жакшы шарт түзгөн. Мисалы, пирамиданын жана конустун көлөмдөрүн аныктоо Демокрит тарабынан ошондо эле белгиленген.

Ошол учурда Грецияда математиканын, анын ичинде геометриянын өнүгүшүнө өзгөчө көңүл бурулган. Ал турсун философияны үйрөнүү үчүн биринчи иретте геометрияны билүү керек деп эсептешкен. Мисалы, Платон тарабынан уюштурулган Академияга «геометрияны билбеген адам кирбей эле койсун» деген сөз эл арасында тарап кеткен.

Ошентип, Грецияда геометриянын өнүгүшү философия менен тыгыз байланышта болгон. Ошонун натыйжасында геометрия гректердин философиялык мектептеринде жогорку баскычка жеткен. Натыйжада биздин эрага чейинки VII—III кылымдарда Грецияда геометрия боюнча көп маселелер топтолгон. Ал топтолгон материалдарды белгилүү бир илимий принциптин негизинде бир системага жайгаштыруу зарылчылыгы келип чыккан.

Бул зарылчылыктуу иш болжол менен биздин эрага чейин III кылымда грек окумуштуусу Евклид тарабынан ишке ашырылган. Анын «Башталыш» деп аталган китеби (жыйнагы) 13 бөлүктөн туруп, геометриянын көп суроолорун камтыган.

Биз жогоруда геометриянын алгачкы тарыхына кыскача токтолдук. Анын жалпы тарыхы өтө көлөмдүү маалыматтардан турат жана ири изилдөөлөрдү талап кылат. Өзгөчө, геометриянын азыркыдай жогорку деңгээлдеги зор тарыхы кимди болсо да кызыктырбай койбойт. Алардын айрымдарына дагы кийинчерээк токтолобуз.

2. ЦИРКУЛДУН ЖАНА СЫЗГЫЧТЫН ЖАРДАМЫ МЕНЕН ТҮЗҮЛБӨЙ (ЧЫГАРЫЛБАЙ) ТУРГАН АЙРЫМ МАСЕЛЕЛЕР

Циркулдун жана сызгычтын жардамы менен чыгарууга мүмкүн болбогон байыркы «атактуу» үч маселеге токтолобуз.

а) Кубду эки эселентүү маселеси

Бул байыркы маселелердин бири. Анын келип чыгышы төмөндөгү жөнөкөй маселеге байланыштуу болушу ыктымал:

аянты берилген квадраттын аянтынан эки эсе чоң болгон квадратты түзгүлө. Бул маселенин циркулдун жана сызгычтын жардамы менен чыгарылышы белгилүү. Берилген квадраттын жагынын узундугу a, изделүүчү квадраттын жагынын узундугун x десек: анда маселенин шарты боюнча $x^2=2a^2$ же $x=a\sqrt{2}$ болот. Мындай кесиндини түзүү үчүн катеттеринин узундуктары a га барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтукту түзсөк, анда анын гипотенузасынын узундугу x болот, демек, изделүүчү квадраттын жагы аныкталат. Ал эми ал жагы боюнча квадратты түзүү белгилүү.

Ушуга окшоштуруп, окумуштуулар кубду эки эселентүү маселесин да циркулдун жана сызгычтын жардамы менен чечүүгө аракеттенишкен. Бирок, аны узак убакыттар бою чече алышкан эмес. Ошондуктан бул маселе өтө маанилүү проблемалык маселелердин бири болуп калган.

Кубду эки эселентүү маселеси төмөндөгүдөй:
кырынын узундугу a га барабар болгон куб берилген. Көлөмү ушул кубдун көлөмүнөн эки эсе чоң болгон кубдун кырын түзүү талап кылынат. Изделүүчү кубдун кырынын узундугун x аркылуу белгилейли. Анда маселенин шарты боюнча $x^3=2a^3$ болот (мында a^3 — берилген кубдун, x^3 изделүүчү кубдун көлөмү). $a=1$ деп алалы. Анда жогорудагы барабардыктан төмөнкү теңдемени алабыз:

$$x^3-2=0 \qquad (1)$$

Эгерде (1) теңдемесинин тамырларын циркуль жана сызгыч менен түзүүгө мүмкүн болсо, анда ал куралдарды колдонуп изделүүчү кубдун кырын түзүүгө мүмкүн болоор эле.

Бирок (1) теңдеменин рационалдык тамыры жок.

Ошентип, берилген маселени циркулдун жана сызгычтын жардамы менен түзүүгө (чыгарууга) болбойт.

б) Бурчту барабар үч бөлүккө бөлүү

Маселенин шарты төмөндөгүдөй: ар кандай бурчту циркулдун жана сызгычтын жардамы менен барабар үч бөлүккө бөлгүлө.

Бул маселе да байыркы маселелердин бири. Ал байыркы Грецияда биздин эрага чейин V кылымда пайда болгон. Ар кандай бурчту циркулдун жана сызгычтын жардамы менен дайыма тең экиге бөлүүгө болот. Ошол кезде эле, «эмне үчүн циркулдун жана сызгычтын жардамы менен ар кандай бурчту барабар үч бөлүккө бөлүү мүмкүн эмес?» – деген суроо келип чыккан.

Анын үстүнө бул маселенин практикалык мааниси да чоң эле. Ал айлананы барабар бөлүктөргө бөлүү маселеси менен да байланыштуу. Мында маселенин жалпы учурда чечилиши талап кылынып жатат. Анткени айрым учурдагы, мисалы: 90° же 180° сыяктуу бурчту үч бөлүккө бөлүү оңой эле. Бирок ар кандай бурчту циркуль жана сызгычтын жардамы менен барабар үч бөлүккө бөлүү мүмкүн эмес экендигин далилдөө үчүн барабар үч бөлүккө бөлүүгө мүмкүн болбогон бир бурчтун бар экендигин көрсөтүү жетиштүү болот.

Берилген бурчтун чоңдугун α аркылуу белгилеп, аны тар бурч деп эсептейли. Эгерде ал кең бурч болсо, анда аны $\alpha=180°-\beta$ түрүндө жазууга болот, мында β тар бурч болуп калат.

$\frac{\alpha}{3}=60°-\frac{\beta}{3}$ түрүндө жазууга мүмкүн болгондуктан, α ны үч бөлүккө бөлүүнү, β ны барабар үч бөлүккө бөлүүгө келтиришет. Анткени 60° бурчту дайыма түзө алабыз. Ошондуктан маселени тар бурч үчүн кароо жетиштүү болот. Изделүүчү тар бурчтун чоңдугун φ аркылуу белгилейли. Анда маселенин шарты боюнча $\varphi=\frac{\alpha}{3}$ болот.

Эгерде борбору координаталар башталышында жаткан жана радиусу бирге барабар болгон айлана берилсе, анда айланада жаткан чекиттин абсциссасы (α — тар бурч болгондо ал оң мааниге ээ) бурчтун косинусун аныктай тургандыгы белгилүү, ошондуктан бурчтун косинусун кесиндини түзүү менен байланыштырабыз. Белгилүү формула боюнча $\cos\alpha=\cos3\varphi$ же $\cos\alpha=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$ болот (бул формула алгебра курсунан силерге белгилүү).

Мындан

$$4\cos^3\varphi-3\cos\varphi-\cos\alpha=0$$

барабардыгына ээ болобуз. $\cos\varphi=\frac{x}{2}$; $\cos\alpha=\frac{b}{2}$ деп белгилесек,

$$x^3-3x-b=0 \tag{2}$$

теңдемесине ээ болобуз. (2) нин рационалдык тамыры болсо, x түзүлөт. Демек, φ да түзүлөт. $0<\alpha<90°$ болгондо, (2) нин рационалдык тамыры болбойт. Мисалы, $\alpha=60°$ десек, $\cos\alpha=60°=\frac{1}{2}$. Анда жогорудагы белгилөө боюнча $b=1$ болот. Натыйжада $x^3-3x-1=0$. Бул тендеменин рационалдык тамыры жок.

Демек, бурчту циркулдун жана сызгычтын жардамы менен барабар үч бөлүккө бөлүүгө мүмкүн эмес.

Ошентип, жалпы учурда циркуль жана сызгычтын жардамы менен бул маселени да чечүүгө мүмкүн эмес.

в) Тегеректи квадратка келтирүү

Бул байыркы «атактуу» маселелердин үчүнчүсү. Муну бардык математикалык маселелердин алгачкысы десек жаңылышпайбыз, анткени ал болжол менен төрт миң жыл мурда эле пайда болгон. Бул маселени чыгарууга гректер, вавилондуктар, египеттиктер жана индиялыктар көп эле аракет кылышкан.

Маселенин берилиши төмөндөгүдөй: циркулдун жана сызгычтын жардамы менен аянты берилген тегеректин аянтына барабар болгон квадратты түзгүлө.

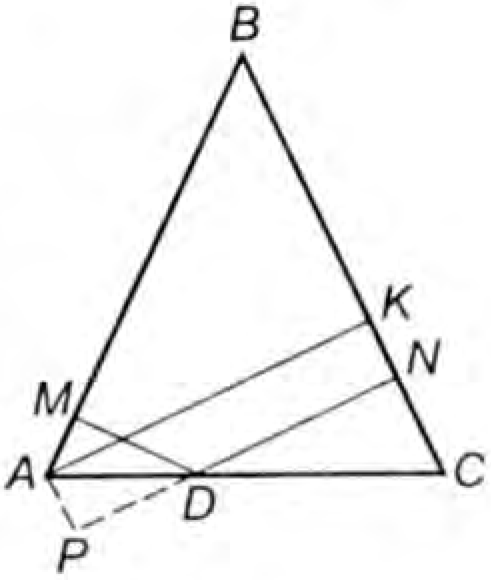
Берилген тегеректин радиусунун узундугун R деп, изделүүчү квадраттын жагынын узундугун x деп белгилейли. Анда тегеректин аянты πR^2, ал эми изделүүчү квадраттын аянты x^2 болот. Маселенин шарты боюнча $x^2=\pi R^2$ же же $x=R\sqrt{\pi}$.

Жогоруда эскерткендей, эгерде квадраттын жагын түзө алсак (белгилүү болсо), анда квадратты дайыма түзө алабыз. Аны түзүү силерге белгилүү. Бирок, мында квадраттын жагын түзүү $\sqrt{\pi}$ санына (б. а. π) санына байланыштуу. Эгерде π кандайдыр оң бүтүн же рационалдуу сан болсо, анда биз x кесиндисин оңой эле түзө алат элек. Бирок, π рационалдык сан эмес. Демек, $x=R\sqrt{\pi}$ кесиндисин, же $R=1$ десек, $x=\sqrt{\pi}$ кесиндисин циркулдун жана сызгычтын жардамы менен түзүүгө мүмкүн эмес. Ошондуктан аянты берилген тегеректин аянтына барабар болгон квадратты түзүү маселеси циркулдун жана сызгычтын жардамы менен чечилбейт.

3. ДАЛИЛДӨӨГӨ ЖАНА ТҮЗҮҮГӨ БЕРИЛГЕН АЙРЫМ МАСЕЛЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ

1. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизинин каалаган чекитинен анын каптал жактарына чейинки аралыктарынын суммасы үч бурчтуктун каптал жагына түшүрүлгөн бийиктикке барабар экендигин далилдегиле.

Далилдөө. Бул сүйлөмдүн тууралыгын адегенде үч бурчтуктун чокусундагы бурчу тар бурч болгон учур үчүн далилдейли. Маселенин шартына туура келүүчү үч бурчтук ABC болсун дейли (175-сүрөт).



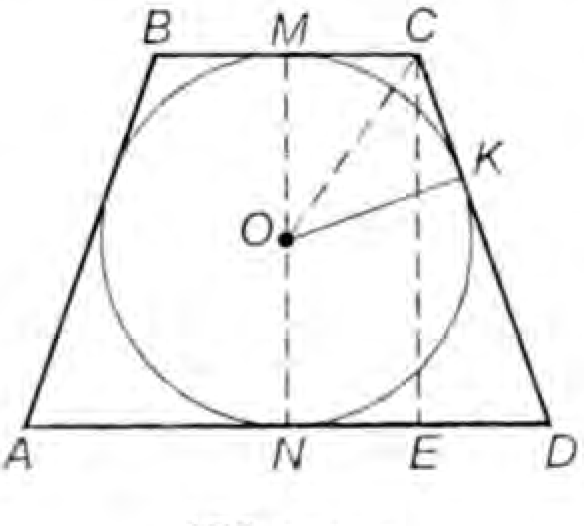
175-сүрөт.

$AB=BC$ болсун, AC негизинен каалаган D чекитин алып, андан үч бурчтуктун каптал жактарына DM жана DN перпендикулярларын жүргүзөбүз: $DM\perp AB$, $DN\perp BC$, BC жагына AK бийиктигин жүргүзөбүз: $AK\perp BC$. Демек $AK\parallel DN$, анткени алар бир эле BC жагына перпендикулярдуу. ND ны D чекитинен ары көздөй созобуз да, A чекити аркылуу BC жагына параллель түз сызык жүргүзөбүз, анын ND кесиндисинин уландысы менен кесилишкен чекитин P аркылуу белгилейбиз. Натыйжада ADP тик бурчтуу үч бурчтугуна ээ болобуз. AMD жана APD тик бурчтуу үч бурчтуктары өз ара барабар, анткени алардын гипотенузалары жалпы (AD), $\angle MAD=\angle DAP$ (булардын ар бири тең капталдуу үч бурчтуктун негизиндеги бурч, анткени $\angle BCA=\angle DAP$, булар параллель BC жана AP түз сызыгы менен кесилишиндеги ички кайчылаш бурчтар болушат. Бул үч бурчтуктардын барабардыгынан $DM=DP$, параллель AP жана BC түз сызыктардын арасындагы перпендикуляр болгондуктан $AK=PN$; $PN=PD+DN=$ $=DM+DN$. Демек, $AK=DM+DN$ экендиги далилденди.

Берилген тең капталдуу үч бурчтуктун чокусундагы B бурчу тик болгондо AK бийиктиги AB жагына дал келет, ал эми B буру кең бурч болгондо, AK бийиктиги үч бурчтуктун тышында CB жагынын уландысына түшүрүлөт.

2. Тең капталдуу трапецияга ичтен тегерек сызылган. Тегеректин аянтынын трапециянын аянтына болгон катышы тегеректин айланасынын узундугунун трапециянын периметрине болгон катышына барабар экендигин далилдегиле.

Далилдөө. $ABCD$ тең капталдуу трапециясына ичтен тегерек сызылган дейли (176-сүрөт). Ичтен сызылган тегеректин радиусу $OM=r$ дейли. Көп маселелерди чыгарууда керектүү элементтерди өз өзүнчө жекече табууга аракеттенүү эч бир натыйжа бербейт, мындай учурда изделүүчү элементтердин бир нечесинин же алгебралык суммасын, же көбөйтүндүсүн, же катышын табуу маселенин чыгарылышын жеңилдетет. Дал ошол сыяктуу маселелердин бири биздин азыркы алган маселебиз болуп эсептелет. Мындай маселени чыгарууда биз, трапециянын эч болбогондо бир жагын (мисалы, BC ны) ичтен сызылган тегеректин радиусу ($OM=R$) аркылуу туюндуруп алууга аракеттенебиз. Ырас, алар тегерекке сырттан сызылган төрт бурчтуктун жактарынын касиети боюнча $AD+BC=AB+CD$ боло тургандыгын жана трапеция тең капталдуу болгондуктан $AD+BC=2AB$ боло тургандыгын, мындан $AB=\frac{AD+BC}{2}$,



176-сүрөт.

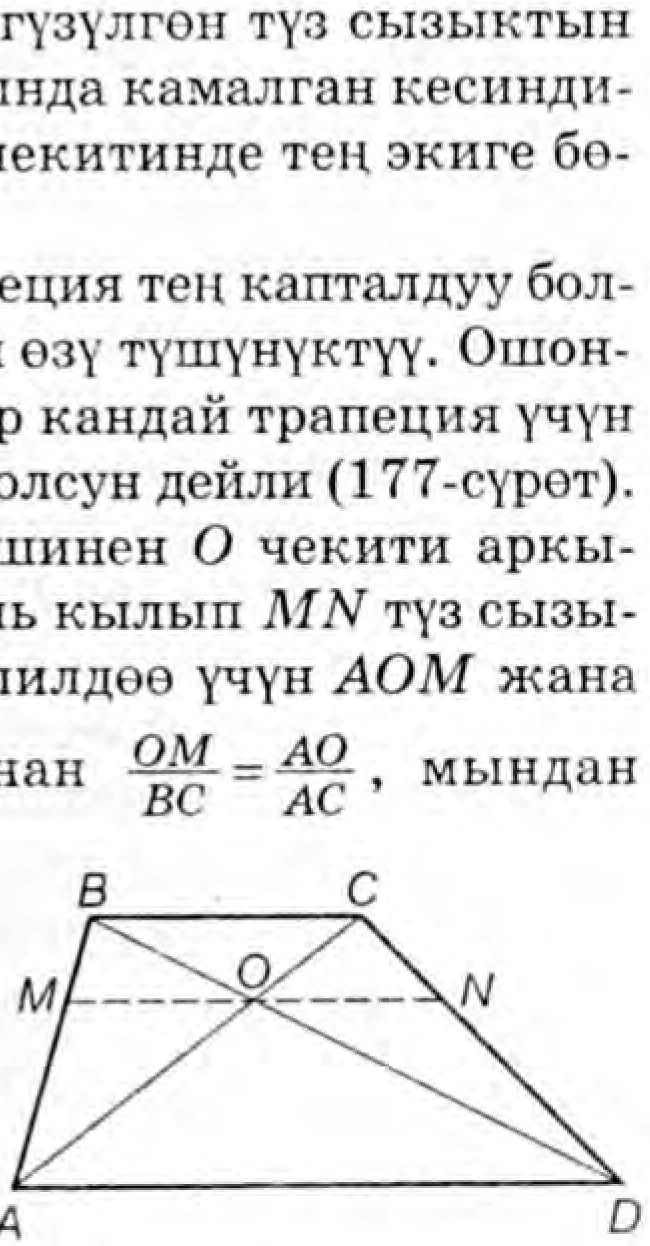
башкача айтканда, трапециянын каптал жагы анын орто сызыгына барабар экендигин аныктайбыз. Андан ары OCD үч бурчтугунун тик бурчтуу экендигин негиздеп, андан $OK=\sqrt{CK\cdot KD}$, башкача айтканда $r=\sqrt{CK\cdot KD}$ экендигин аныктап, CED тик бурчтуу үч бурчтугунанбы же башка көз карандылыктарданбы, иши кылып трапециянын бир жагын ичтен сызылган айлананын радиусу аркылуу туюнтууга аракеттенүү мүмкүн. Бирок мындай аракет бир натыйжа бербейт. Ошондуктан трапециянын кандайдыр бир сызыктуу элементин ичтен сызылган тегеректин радиусу аркылуу туюндурууга курулай аракеттене бербестен, маселенин талабына ылайык келүүчү катыштарды түздөн түз табууга өтө берүү керек. Ошентип биздин белгилөөлөр жана жогоруда келтирилген баяндамалар боюнча:

тегеректин аянты πr^2 ка,
трапециянын аянты $MN\cdot CD=2rCD$ га,
айлананын узундугу $2\pi r$ ге,
трапециянын периметри $2CD+BC+AD=4CD$ га барабар.

Демек: $\frac{\pi r^2}{2r\cdot DC}=\frac{2\pi r}{4CD}$ мындан $\frac{\pi r}{2\cdot CD}=\frac{\pi r}{2\cdot CD}$ экендиги өзүнөн өзү келип чыгат.

3. Трапециянын диагоналдарынын кесилишкен чекитинде анын негиздерине параллель болуп жүргүзүлгөн түз сызыктын трапециянын каптал жактарынын арасында камалган кесиндиси, ошол диагоналдардын кесилишкен чекитинде тең экиге бөлүнөрүн далилдегиле.

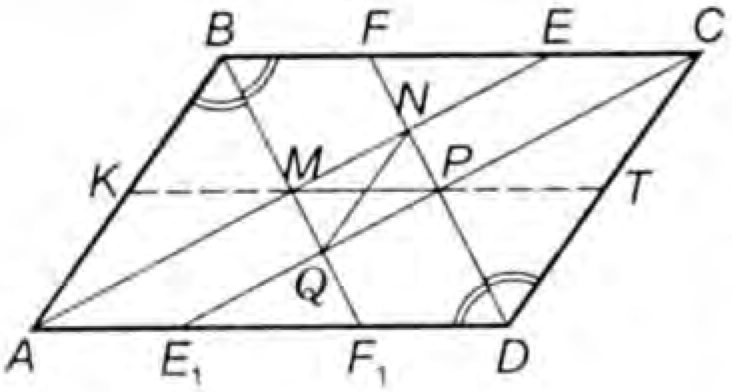
Далилдөө. Эгерде берилген трапеция тең капталдуу болсо, анда маселенин чыгарылышы өзүнөн өзү түшүнүктүү. Ошондуктан биз бул сүйлөмдүн тууралыгын ар кандай трапеция үчүн далилдейбиз. Берилген трапеция $ABCD$ болсун дейли (177-сүрөт). BD жана AC диагоналдарынын кесилишинен O чекити аркылуу, трапециянын негиздерине параллель кылып MN түз сызыгын жүргүзөбүз. $MO=ON$ экендигин далилдөө үчүн AOM жана ABC үч бурчтуктарынын окшоштугунан $\frac{OM}{BC}=\frac{AO}{AC}$, мындан $OM=BC\cdot\frac{AO}{AC}$ ны; OND жана BCD үч бурчтуктарынын окшоштугунан: $\frac{ON}{BC}=\frac{OD}{BD}$, мындан $ON=BC\cdot\frac{OD}{BD}$ ны табабыз. Үчтөн бурчтары барабар болушкандыктан BOC жана AOD үч бурчтуктары да окшош. Демек: $\frac{AO}{OC}=\frac{OD}{BO}$,



177-сүрөт.

мындан $\frac{AO}{AO+OC}=\frac{OD}{OD+BO}$ же $\frac{AO}{AC}=\frac{OD}{BD}$ экендиги келип чыгат. Ошентип, биз $OM=BC\cdot\frac{AO}{AC}$; $ON=BC\cdot\frac{OD}{BD}$, $\frac{AO}{AC}=\frac{OD}{BD}$ экендигине ээ болобуз. Бул үч барабардыкты салыштырып көрүп $OM=ON$ деген корутундуга келебиз.

4. Параллелограммдын ички бурчтарынын биссектрисаларынын кесилишинен тик бурчтук пайда болоорун жана ал тик бурчтуктун диагоналы параллелограммдын жанаша жаткан жактарынын айырмасына барабар боло тургандыгын далилдегиле.



178-сүрөт.

Далилдөө. Берилген параллелограмм $ABCD$ болсун дейли (178-сүрөт), анын ички бурчтарынын биссектрисаларын жүргүзөбүз, алардын кесилишинен $MNPQ$ төрт бурчтугу пайда болот. Мында параллелограммдын карама каршы бурчтарынын биссектрисалары өз ара параллель болушат, башкача айтканда: $AE \parallel CE_1$, $DF \parallel BF_1$.

Параллелограммдын бир жагына тиешелүү бурчтар болушкандыктан $\angle A+\angle B=2d$, демек $\angle BAM+\angle MBA=d$. Ошондуктан $\angle AMB=\angle QMN=d$, башкача айтканда $MNPQ$ тик бурчтук.

ABM жана BME тик бурчтуу үч бурчтуктарынын барабардыгынан (анткени алардын BM — катети жалпы жана бирден тар бурчтары барабар) $AB=BE$ экендиги, башкача айтканда ABE үч бурчтугу (ошондой эле CDE_1 үч бурчтугу да) тең капталдуу экендиги келип чыгат. Демек $AM=ME$ (ошондой эле $CP=PE_1$). $AECE_1$ параллелограммынын жактары болушкандыктан $AE=CE_1$ экендигин эске алып $AM=ME=E_1P=PC$ экендигине ынанабыз. Демек бирден тар бурчтары (MAF_1 жана PE_1D) жана бирден катеттери (AM жана E_1P) барабар болушкандыктан MAF_1 жана PE_1D тик бурчтуу үч бурчтуктары өз ара барабар болушат. Бул үч бурчтуктардын экөөнүн тең гипотенузасы AD түз сызыгында жаткандыктан алардын гипотенузаларына түшүрүлүүчү бийиктиктери да өз ара барабар болушат, башкача айтканда M жана P чекиттери AD дан бирдей алыстыкта, демек, $MP \parallel AD$ болот.

ABE үч бурчтугунун орто сызыгы $KM=\frac{1}{2}BE$, E_1CD үч бурчтугунун орто сызыгы $PT=\frac{1}{2}E_1D$,

$$MP=KT-(KM+PT)=AD-(\tfrac{1}{2}BE+\tfrac{1}{2}E_1D)=AD-(\tfrac{1}{2}BE+\tfrac{1}{2}BE)$$

анткени $BE=E_1D$.

$MP=AD-BE=AD-AB$, анткени $AB=BE$. Ошентип, тик бурчтуктун диагоналы параллелограммдын жанаша жаткан жактарынын айырмасына барабар экендиги далилденди.

5. Тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарына окшош жактары үч бурчтуктун жактары болгондой кылынып окшош көп бурчтуктар курулган. Гипотенузага курулган көп бурчтуктун аянты катеттерге курулган көп бурчтуктардын аянттарынын суммасына барабар экендигин далилдегиле.

Далилдөө. ABC тик бурчтуу үч бурчтугунун жактарына өз ара окшош болгон кандайдыр бир көп бурчтуктар курулду дейли (179-сүрөт). Гипотенузага курулган көп бурчтуктун аянтын S_c деп, a жана b катеттерине курулган көп бурчтуктардын аянттарын S_a жана S_b деп белгилейли.

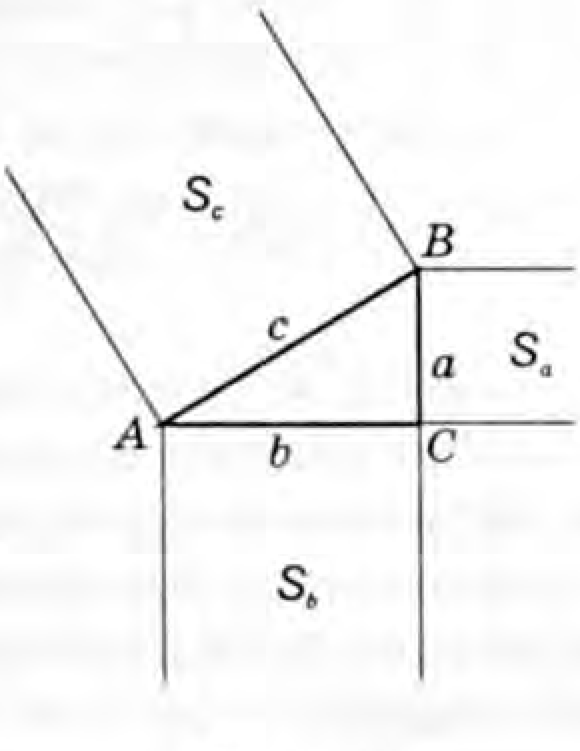
Окшош көп бурчтуктардын аянттары алардын окшош жактарынын квадраттарындай катыша тургандыктан:

$$\frac{S_a}{S_c}=\frac{a^2}{c^2};\ \frac{S_b}{S_c}=\frac{b^2}{c^2};\ \frac{S_a}{S_c}+\frac{S_b}{S_c}=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2};$$

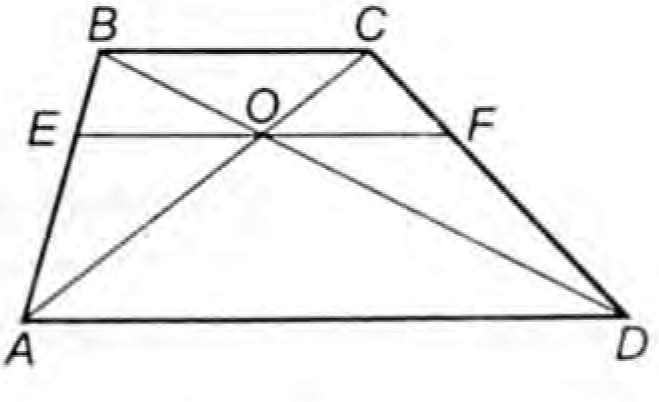
$$\frac{S_a+S_b}{S_c}=\frac{a^2+b^2}{c^2};\ \frac{S_a+S_b}{S_c}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1.$$

мындан $S_a+S_b=S_c$ экендиги келип чыгат.

6. $ABCD$ трапециянын диагоналдарынын кесилишкен чекити аркылуу анын негиздерине EF параллель түз сызыгы жүргүзүлгөн. EF түз сызыгы негиздердин орточо гармоникалык мааниси (EF тин тескери чоңдугу) негиздердин тескери чоңдуктарынын орточо арифметикалык маанисине барабар), башкача айтканда $\frac{1}{EF}=\frac{1}{2}(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD})$ боло тургандыгын далилдегиле (180-сүрөт).



179-сүрөт.



180-сүрөт.

Далилдөө. ABC жана AOE үч бурчтуктарынын окшоштугунан $\frac{BC}{EO}=\frac{AB}{AE}$; ABD жана BOE үч бурчтуктарынын окшоштугунан $\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{EO}$. Бул пропорциялардан

$$\frac{EO}{BC}+\frac{OE}{AD}=\frac{AE}{AB}+\frac{BE}{AB};\ OE\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right)=\frac{AE+EB}{AB}=\frac{AB}{AB}=1.$$

OFD жана BCD үч бурчтуктарынын окшоштугунан $\frac{OF}{BC}=\frac{FD}{CD}$; COF жана ACD үч бурчтуктарынын окшоштугунан $\frac{OF}{AD}=\frac{CF}{CD}$. Бул пропорцияларды мүчөлөп кошобуз.

$$\frac{OF}{BC}+\frac{OF}{AD}=\frac{FD}{CD}+\frac{CF}{CD};\ OF\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right)=\frac{DF+FC}{CD}=\frac{DC}{CD}=1.$$

$$OE\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right)+OF\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right)=2,$$

$$\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right)(OE+OF)=2;\ \left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right)\cdot EF=2;$$

мындан:

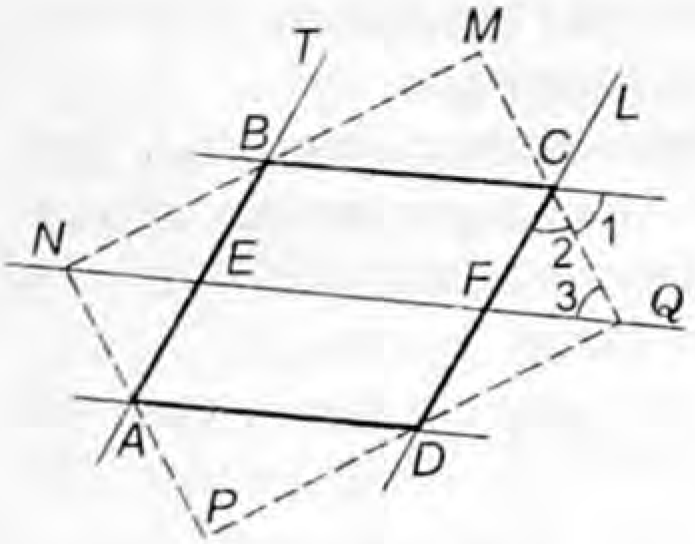
$$\frac{1}{EF}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right).$$

7. Параллелограммдын тышкы бурчтарынын биссектрисаларынын кесилишинен диагоналы параллелограммдын жанаша жаткан жактарынын суммасына барабар болгон тик бурчтук пайда болоорун далилдегиле.

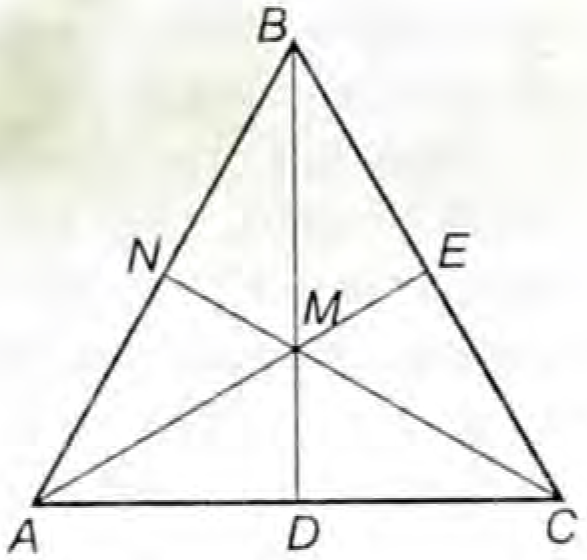
Далилдөө. Адегенде $ABCD$ параллелограммынын тышкы бурчтарынын биссектрисаларынын кесилишинен пайда болуучу $MNPQ$ төрт бурчтугунун тик бурчтук экендигин көрсөтүүгө киришели (181-сүрөт).

BT жана CL параллель түз сызыктарынын BC түз сызыгы менен кесилишкендеги бир жактуу бурчтар болушкандыктан $\angle TBC+\angle LCB=180°$, $\frac{1}{2}\cdot\angle TBC+\frac{1}{2}\cdot\angle LCB=90°$, башкача айтканда $\angle MBC+\angle MCB=90°$, демек $BMC=90°$. Ушул эле сыяктуу $MNPQ$ төрт бурчтугунун калган N, P жана Q бурчтарынын ар бири да тик экендигин далилдөөгө болот. Мунун өзү $MNPQ$ — тик бурчтук дегендикке жатат.

Эми бул төрт бурчтуктун NQ диагоналын жүргүзүп, анын AB жана CD жактары менен кесилишкен чекиттерин E жана F аркылуу белгилейбиз. CQ тышкы бурчтун биссектисасы болгондуктан $\angle 1=\angle 2$, параллель түз сызыктардын үчүнчү бир түз сызык менен кесилишкендеги ички кайчылаш бурчтар болгондуктан $\angle 1=\angle 3$, демек $\angle 2=\angle 3$, башкача айтканда FCQ тең капталдуу үч бурчтук: $FC=FQ$. Ушундай эле жол менен FDQ үч бурч-



181-сүрөт.



182-сүрөт.

тугунун да тең капталдуу экендигин, башкача айтканда $FQ=FD$ экендигин далилдөөгө болот. Ошентип биз акыркы эки барабардыктан $FQ=\frac{1}{2}CD$ экендигине ээ болобуз. Дал ушундай эле жол менен $EN=\frac{1}{2}AB$ экендигин көрсөтүүгө болот.

Натыйжада $MNPQ$ тик бурчтугунун диагоналы

$$NQ=NE+EF+FQ=\frac{1}{2}AB+BC+\frac{1}{2}AB=AB+BC$$

экендиги келип чыгат.

8. Тең жактуу үч бурчтуктун ичинен алынган кандайдыр бир M чекитинен анын жактарына чейинки аралыктардын суммасы турактуу жана ал үч бурчтуктун бийиктигине барабар экендигин далилдегиле.

Далилдөө. ABC тең жактуу үч бурчтугунун M чекитинен анын жактарына MD, ME жана MN перпендикулярларын жүргүзүп, M чекитин үч бурчтуктун чокулары менен туташтырабыз (182-сүрөт). Натыйжада ABC үч бурчтугу үч үч бурчтукка бөлүнөт. Анын аянты берилген үч үч бурчтуктун аянттарынын суммасына барабар. Демек:

$$S_{ABC}=S_{AMC}+S_{CMB}+S_{BMA}=\frac{1}{2}DM\cdot AC+\frac{1}{2}EM\cdot BC+\frac{1}{2}NM\cdot AB.$$

Үч бурчтук тең жактуу: $AB=AC=BC$ болгондуктан

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB(DM+EM+NM)=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h,$$

башкача айтканда $DM+EM+NM=h$ үч бурчтуктун бийиктиги. Акыркы барабардыктагы үч кесиндинин суммасы M чекитинин үч бурчтуктун кайсы жеринен алынгандыгына карабастан дайыма турактуу болот, анткени үч бурчтуктун аянты турактуу.

9. Параллелограммдын ичинен алынган чекит анын бардык чокулары менен туташтырылган. Мына ушундан пайда бо-

луучу карама-каршы үч бурчтуктардын аянттарынын суммасы өз ара барабар болуша тургандыгын далилдегиле.

Далилдөө. *ABCD* параллелограммынын ичинен *O* чекитин алып, аны параллелограммдын чокулары менен туташтырабыз (183-сүрөт). *BOC* жана ага карама-каршы *AOD* үч бурчтуктарынын аянттарынын суммасын табалы.

$$S_{BOC}=\frac{1}{2}BC\cdot OM\ ,\ S_{AOD}=\frac{1}{2}AD\cdot ON\ ;$$

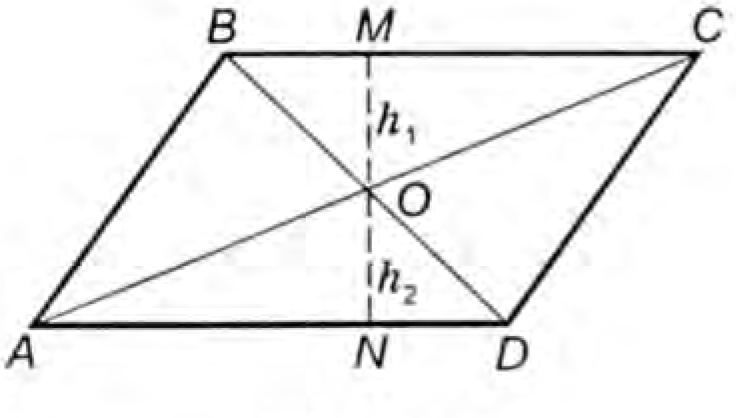
$$S_{BOC}+S_{AOD}=\frac{1}{2}AD(OM+ON)=\frac{1}{2}AD\cdot MN=\frac{1}{2}S_{ABCD}\ .$$

AOB жана *DOC* үч бурчтуктарынын аянттарынын суммасы да параллелограммдын аянтынын жарымына барабар болорун көрсөтүүгө болот.

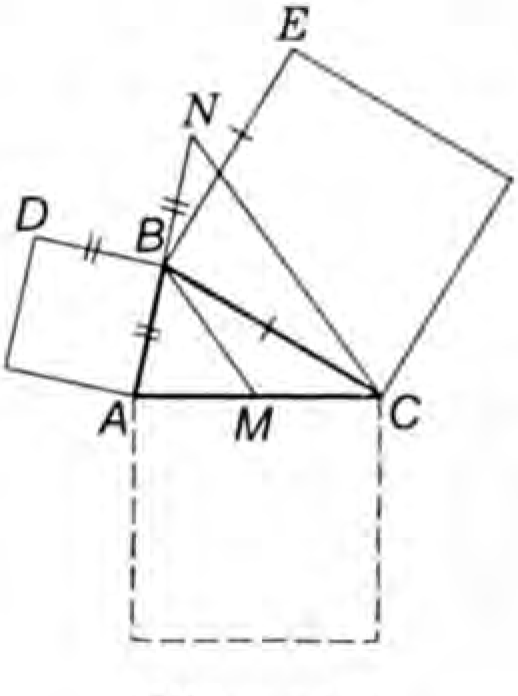
Ошондуктан $S_{BOC}+S_{AOD}=S_{AOB}+S_{DOC}$ экендиги келип чыгат.

10. Үч бурчтуктун жактарына квадраттар курулган. Квадраттардын үч бурчтуктун бир чокусунан чыгуучу жактарынын учтарын туташтыруучу кесинди үч бурчтуктун ошол чокусунан жүргүзүлгөн медианасынан эки эсе чоң боло тургандыгын далилдегиле.

Далилдөө. *ABC* үч бурчтугунун жактарына квадраттар куруп, *AB* жагын *N* чекитине чейин *BN*=*AB* кесиндисине улантып, *B* чокусунан *AC* жагына *BM* медианасын жүргүзөбүз (184-сүрөт). Мындан *MA*=*MC* болгондуктан *ANC* үч бурчтугунун орто сызыгы $BM=\frac{1}{2}NC$, $\angle DEB=\angle BNC$ анткени $DB=BN$, $BE=BC$, $\angle DBE=$ $=\angle NBC=90°+\angle NBE$. Демек, $DE=NC$, ошондуктан $BM=\frac{1}{2}NC=\frac{1}{2}DE$. $DE=2BM$. Ушул эле сыяктуу *A* жана *C* чокуларынан чыккан квадраттардын жактарынын учтарын бириктирүүчү кесиндилердин ар биринин тиешелүү медианадан эки эсе чоң экендигин да далилдөөгө болот.



183-сүрөт.



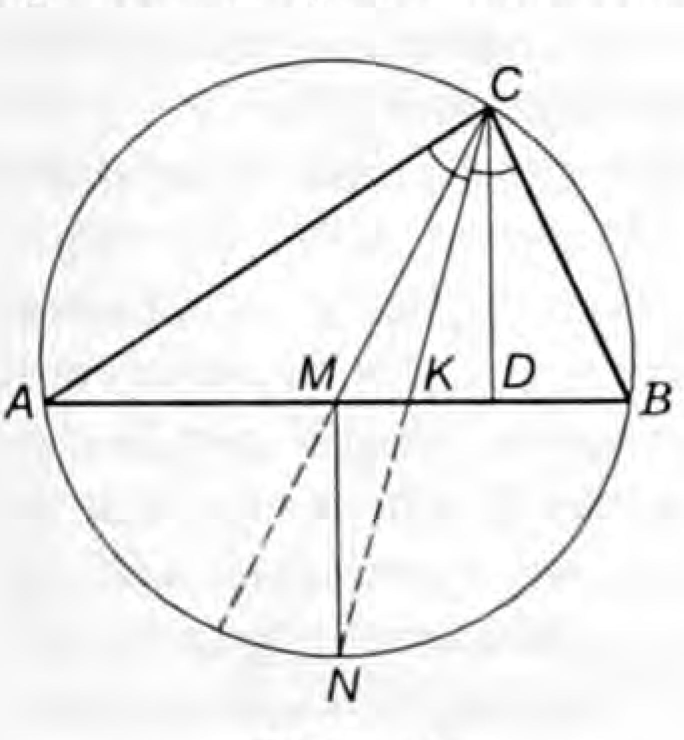
184-сүрөт.

11. Ар кандай үч бурчтукта кандайдыр бир бурчтун биссектрисасы ошол эле бурчтун чокусу аркылуу жүргүзүлгөн анын медианасы менен бийиктигинин арасында боло тургандыгын далилдегиле.

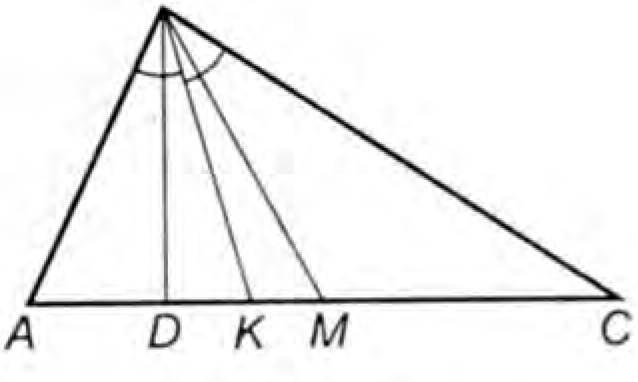
Далилдөө. 1-жол. Берилген ABC үч бурчтугуна сырттан айлана сызабыз. C чокусунан үч бурчтуктун CD бийиктигин, CM медианасын жана CK биссектрисасын жүргүзөбүз (185-сүрөт). CK биссектрисасын айлана менен N чекитинде кесилишкенче созобуз, анда $\angle ACK=\angle NCB$ болгондуктан $\breve{AN}=\breve{NB}$ болот. N чекитин медиананын негизи болгон M чекити менен туташтырабыз. $AM=MB$, $\breve{AN}=\breve{NB}$ болгондуктан $MN\perp AB$. CN жантык сызыгынын (биссектрисанын) учтарынын AB түз сызыгындагы проекциясы, M менен D (медиананын негизи менен бийиктиктин негизи) ABC тең капталдуу үч бурчтук болуучу жалгыз бир учурдан башка бардык учурда тең, K чекитинин эки жагында болот. Эгерде ABC тең капталдуу үч бурчтук болуп калса, анда M, K жана D чекиттери бири-бирине дал келишет.

2-жол. D, K жана M чекиттери ABC үч бурчтугунун B бурчунун чокусу аркылуу жүргүзүлгөн бийиктиктин, биссектрисасынын жана медиананын негиздери болушсун дейли (186-сүрөт). Эгерде $AB=BC$ болсо, анда D, K, M чекиттери бири бирине дал келишет. $AB<BC$ болсун дейли, анда $\angle A>\angle C$ (анткени чоң жактын каршысында чоң бурч жатат).

Демек, $\angle ABD<\angle DBC$, анткени ABD жана DBC тик бурчтуу үч бурчтуктарынын ар бириндеги тар бурчтардын суммасы туруктуу жана $\angle BAD>\angle BCD$. Ошентип, $\angle ABD<\angle DBC$, ал эми $\angle DBC=\angle ABC-\angle ABD$. Демек, $\angle ABD<\frac{1}{2}\angle ABC$, башкача айтканда $\angle ABD<\angle ABK$ жана D чекити AK кесиндисинде жатат. Бурчтун биссектрисасынын касиети боюнча $AK:KC=AB:BC$, болжол-



185-сүрөт.



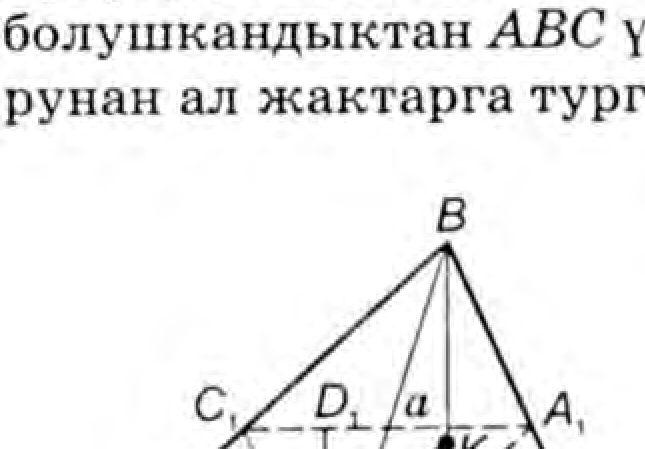
186-сүрөт.

доо боюнча $AB<BC$ болгондуктан акыркы барабардыктан $AK<KC$ экендиги келип чыгат. Мындан $AK<\frac{1}{2}AC=AM$ экендигине ээ болобуз, демек M чекити KC кесиндисинде жатат.

Ошентип, K чекити D жана M чекиттеринин арасында боло тургандыгы далилденди.

12. Ар кандай үч бурчтукта анын медианаларынын кесилишкен чекити, орто центри (бийиктиктеринин кесилишкен чекити) жана сырттан сызылган айлананын борбору бир түз сызыкта (Эйлердин түз сызыгы деп аталуучу түз сызыкта) жатыша тургандыгын далилдегиле.

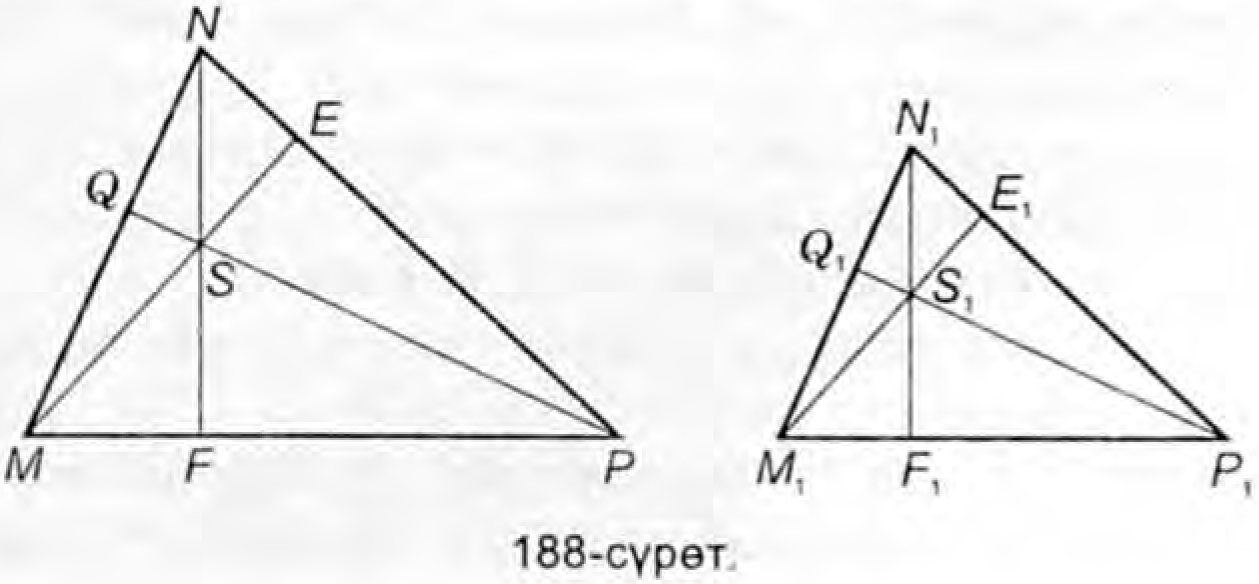
Далилдөө. ABC үч бурчтугунун жактарынын теӊ ортолорун туташтыруу аркылуу $A_1B_1C_1$ үч бурчтугуна ээ болобуз (187-сүрөт). Тиешелүү жактары пропорциялаш болгондуктан ABC жана $A_1B_1C_1$ үч бурчтуктары өз ара окшош, алардын окшоштук коэффициенти 0,5 ке барабар. ABC үч бурчтугунун медианаларынын кесилишкен O чекити $A_1B_1C_1$ үч бурчтугунун медианаларынын да кесилишкен чекити болот, башкача айтканда $A_1B_1C_1$ үч бурчтугунун медианалары ABC үч бурчтугунун медианаларынын бөлүгүн түзүшөт, анткени $A_1B_1C_1$ үч бурчтугунун, мисалы, A_1 чокусунан жүргүзүлүүчү анын медианасын алып көрө турган болсок, ал сөзсүз AA_1 медианасынын бөлүгүн түзөт (чындыгында эле $AC_1A_1B_1$ — параллелограмм болгондуктан анын A_1A жана C_1B_1 диагоналдары болгондуктан анын A_1A жана C_1B_1 диагоналдары $A_1C_1B_1$ үч бурчтугунун C_1B_1 жагынын теӊ ортосунда кесилишет). $A_1B_1C_1$ үч бурчтугунун калган C_1 жана B_1 чокуларынан чыгуучу медианалары да ABC үч бурчтугунун C жана B чокулары аркылуу жүргүзүлгөн медианаларынын бөлүктөрүн түзө тургандыгын ушундай эле жол менен көрсөтүүгө болот. ABC жана $A_1B_1C_1$ үч бурчтуктарынын окшош жактары өз ара параллель болушкандыктан ABC үч бурчтугунун жактарынын теӊ ортолорунан ал жактарга тургузулган перпендикуляр $A_1B_1C_1$ үч бурчтугунун бийиктиктери болушат, башкача айтканда ABC үч бурчтугуна сырттан сызылуучу айлананын борбору $A_1B_1C_1$ үч бурчтугунун ортоцентри болот, аны N деп белгилейли. N жана O чекиттери аркылуу жүргүзүлгөн түз сызык ABC үч бурчтугунун бийиктиктеринин кесилишкен K чекити аркылуу да өтө тургандыгын көрсөтүү керек.



187-сүрөт.

ABC жана $A_1B_1C_1$ үч бурчтуктарынын окшоштук коэффициенти 0,5ке барабар болгондуктан: 1) алардын окшош жактарына түшүрүлгөн бийиктиктеринин катышы: $B_1D_1{:}BD=0,5$ жана 2) окшош жактарына түшүрүлгөн медианалардын катышы да $B_1O_1{:}BB_1=0,5$ болот. Бул акыркы эки барабардыктын негизинде үч бурчтуктардын окшоштугун эске алып: $B_1N{:}BK=0,5$ жана $B_1O{:}BO=0,5$ деген корутундуга келебиз. Чындыгында эле, эгерде берилген эки үч бурчтук окшош болсо, анда алардын, мисалы, окшош бийиктиктери гана эмес, ошол окшош бийиктиктеринин тиешелүү кесиндилери (мисалы, бийиктиктеринин ортоцентрден чокуга чейинки кесиндилери) да үч бурчтуктун жактары сыяктуу катыша тургандыгын байкоого болот. Мисалы, эгерде MNP үч бурчтугу $M_1N_1P_1$ үч бурчтугуна окшош болсо (188-сүрөт), анда алардын окшош жактарынын пропорциялаштыгынан жана бурчтарынын барабардыгынан пайдаланып, алардын ар биринин, мисалы, бардык үч бийиктиктерин жүргүзүүдөн пайда болуучу туундуу үч бурчтуктардын да окшош болуша тургандыгын (мисалы: MQP менен $M_1Q_1P_1$, MEP менен $M_1E_1P_1$, MSP менен $M_1S_1P_1$, ESP менен $E_1S_1P_1$ жана башка үч бурчтуктардын) көрсөтүүгө болот. Мына ошол туунду үч бурчтуктардын окшоштугунан $SP{:}S_1P_1=SF{:}S_1F_1=SM{:}S_1M_1=...=MP{:}M_1P_1$ экендигине ээ болобуз. Окшош үч бурчтуктардын бийиктиктеринин гана эмес медианаларынын жана биссектрисаларынын тиешелүү кесиндилеринин катышы жөнүндө да ушундай эле ой жүргүзүүгө болот.

Мына ошентип, жогорку биздин негизги маселеге карата чийилген чийме боюнча $B_1N=\frac{1}{2}BK$ жана $B_1O=\frac{1}{2}BO$ экендигин көрдүк. Мындан тышкары $B_1D_1 \| BD$ болгондуктан $\angle NB_1O=\angle OBK$, демек, $\Delta B_1NO \sim \Delta OBK$, мындан $\angle NOB_1=\angle BOK$ экендиги, башкача айтканда NO менен OK бир түз сызыкта жата тургандыгы келип чыгат. Мына ошентип биз ар кандай ABC үч бурчтугунда анын медианаларынын кесилишкен чекити (O), ортоцентри (K) жана жактарынын тең ортолорунан тургузулган перпендикуляр-

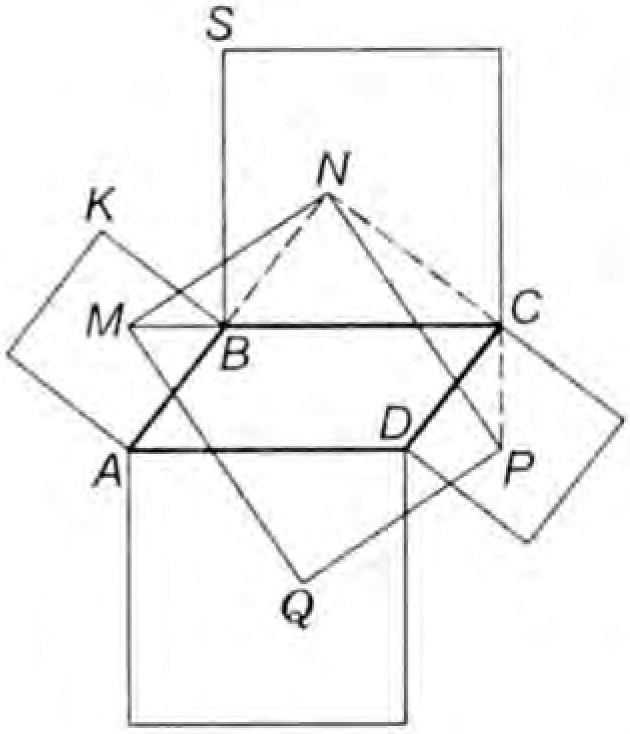


188-сүрөт

лардын кесилишкен чекити (N) үчөө тең бир түз сызыкта жата тургандыгын далилдедик.

13. Параллелограммдын жактарына анын сыртын көздөй курулган квадраттардын борборлору квадраттын чокулары боло тургандыгын далилдегиле.

Далилдөө. $ABCD$ параллелограммынын жактарына квадраттар курабыз (189-сүрөт). Бул квадраттардын борборлорун туташтыруудан пайда болгон $MNPQ$ төрт бурчтугунун квадрат боло тургандыгын далилдөө үчүн биринчиден анын жактарынын барабар экендигин, экинчиден анын бурчтарынын тик экендигин көрсөтүү жетиштүү болот. Параллелограммдын, мисалы, B жана C чокуларынын ар бирин тиешелүү квадраттардын борборлору менен туташтырып биз MBN жана NCP үч бурчтуктарына ээ болобуз. Бул үч бурчтуктар өз ара барабар, анткени $BM=CP$, $BN=CN$ жана $\angle MBN=\angle NCP$ (себеби $\angle MBN=\angle MBK+$ $+\angle SBN+\angle KBS=90°+\angle KBS$, ошондой эле $\angle NCP=90°+\angle DCB$, бирок тиешелүү жактары өз ара перпендикулярдуу болгондуктан $\angle KBS=\angle DCB$). MBN жана CNP үч бурчтуктарынын барабардыгынан $MN=NP$ экендиги келип чыгат. Ушул эле сыяктуу $PQ=QM=MN$ экендигин да көрсөтүүгө болот, башкача айтканда төрт бурчтуктун жактарынын барабар экендиги далилденди. MBN жана NPC үч бурчтуктарынын барабардыгынан $\angle MNB=\angle PNC$ экендиги келип чыгат. $\angle BNC=90°$ жана $\angle MNB=\angle PNC$ болгондуктан $\angle MNP=90°$, башкача айтканда төрт бурчтуктун бурчу тик болот. Бардык жактары барабар болгондуктан $MNPQ$ — параллелограмм, ал эми бир бурчу тик болгондуктан ал квадрат болот.

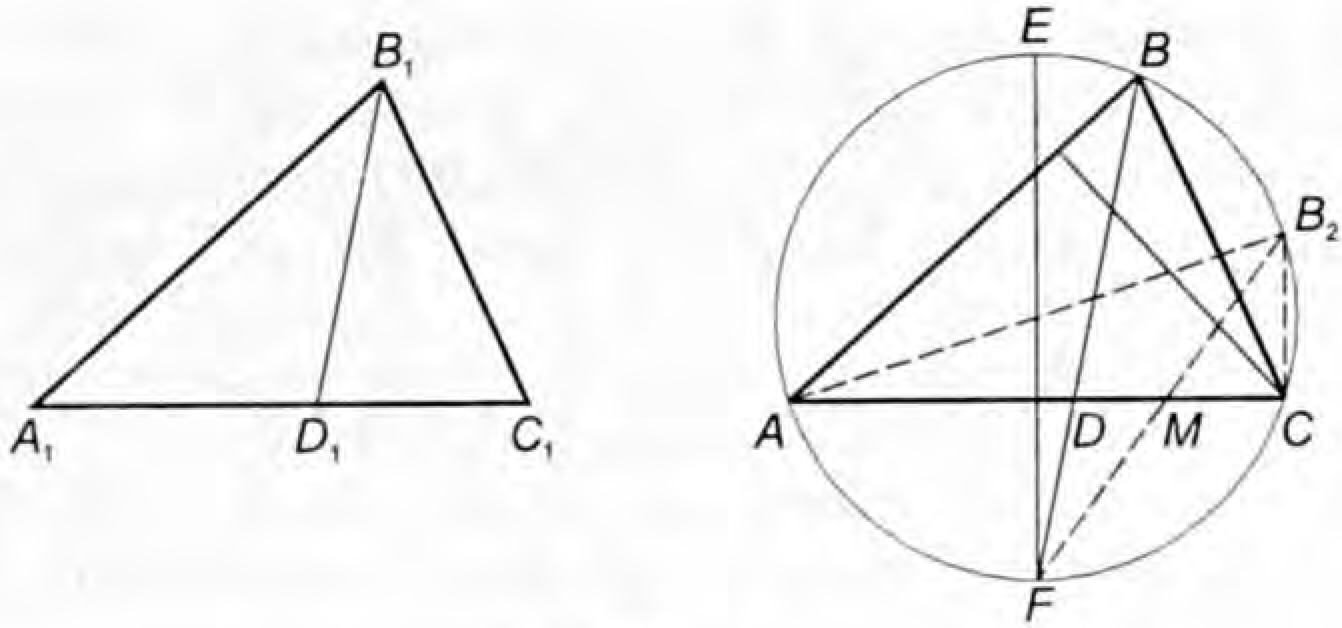


189-сүрөт.

14. Эгерде үч бурчтуктун эки биссектрисасы өз ара барабар болсо, анда ал тең капталдуу боло тургандыгын далилдегиле.

Бул маселени чыгаруу үчүн адегенде кошумча төмөнкү маселени чыгарууга туура келет. «Эгерде берилген ABC жана $A_1B_1C_1$ үч бурчтуктарынын негиздери чокусундагы бурчтары жана ал бурчтарынын биссектрисалары өз ара барабар болушса ($AC=A_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$, $BD=B_1D_1$), анда ал үч бурчтуктардын өздөрү да барабар болушат (190-сүрөт).

Далилдөө. ABC үч бурчтугуна сырттан айлана сызабыз да, анын AC жагына перпендикулярдуу кылып EF диаметрин



190-сүрөт.

жүргүзөбүз. $A_1B_1C_1$ үч бурчтугун ABC үч бурчтугунун үстүнө алардын барабар негиздери жана барабар бурчтары өз ара дал келишкендей кылып коебуз. Бул учурда үч бурчтуктардын барабар биссектрисалары жана алардын өздөрү да толук бири бирине дал келишет. Бул корутундунун тууралыгын карама-каршы метод менен далилдейли, башкача айтканда B_1 чокусу B чокусуна дал келишпейт, башка бир B_2 абалында болот деп болжолдойлу. Маселенин шарты боюнча $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$, биздин болжолдообуз боюнча

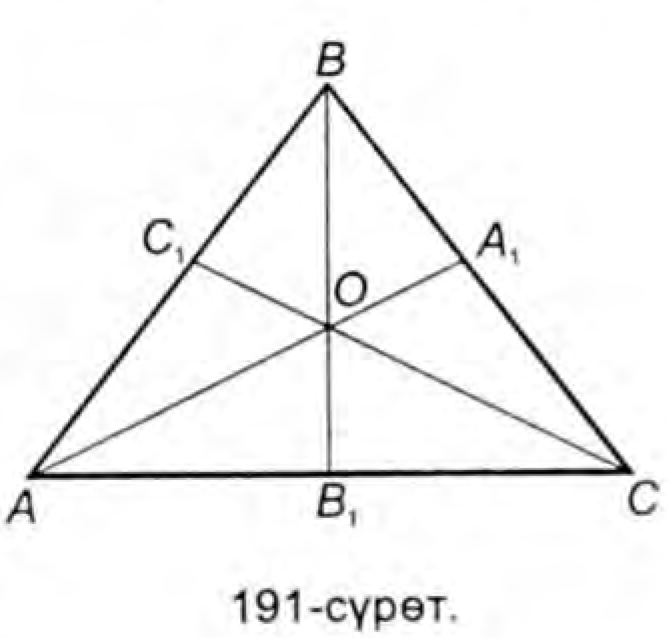
$\angle A_1B_1C_1=\angle AB_2C$ болгондуктан B_2 чекити айланада жаткан болот. B_1D_1 биссектрисасы B_2M ге өтсүн F чекити AC жаасынын тең ортосу болгондуктан AC жаасына таянуучу ичтен сызылган B жана B_2 бурчтарынын экөөнүн тең биссектрисаларынын (BD менен B_2M дин) уландылары F чекити аркылуу өтөт.

$\overset{\smile}{FCB} > \overset{\smile}{FCB_2}$ болсун дейли, анда $FB>FB_2$ жана $FD<FM$ (анткени AC түз сызыгындагы FD нын проекциясы FM дин проекциясынан кичине). Демек,

$BD=BF-FD>B_2F-FM=B_2M=B_2D_1$, $BD>B_1D_1$.

Бул натыйжа маселенин шартына ($BD=B_1D_1$) туура келбейт. Демек B_1 чокусу B чокусуна дал келбейт деп болжолдоого болбойт, алар сөзсүз дал келишет. Ошондуктан $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ болуп чыгат.

Эми негизги маселенин чыгарылышына өтөлү. ABC берилген үч бурчтук болсун (191-сүрөт). Анын A жана C бурчтарынын AA_1 жана CC_1 биссектрисаларын жүргүзөлү. Алар $AA_1=CC_1$ болушсун. B бурчунун BB_1 биссектрисасын жүргүзөбүз. Анда жогоруда далилденген маалымат боюнча $\Delta AA_1B=$



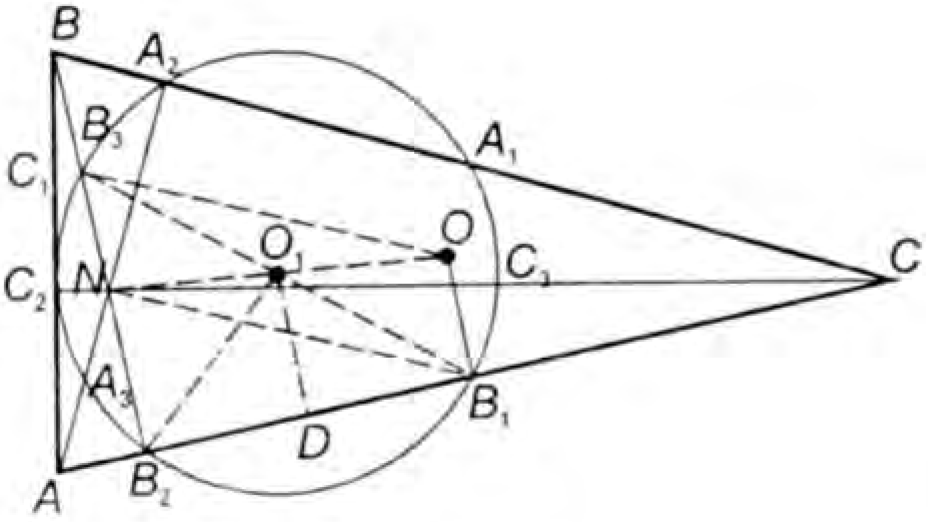
191-сүрөт.

$=\Delta CC_1B$, анткени алардын негиздери барабар ($AA_1=CC_1$) чокусундагы бурчтары барабар (B бурчу жалпы бурч) чокусундагы бурчтарынын биссектрисалары барабар (BO жалпы биссектриса). Бул үч бурчтуктардын барабардыгынан $AB=BC$, башкача айтканда ABC нын тең капталдуу үч бурчтук экендиги келип чыгат.

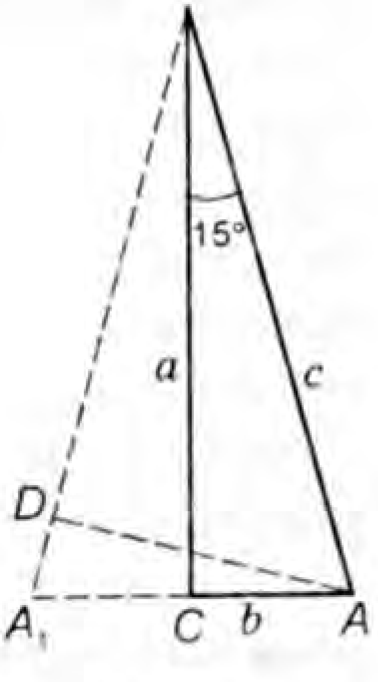
15. Ар кандай үч бурчтукта анын үч жагынын тең ортолору, үч бийиктигинин негиздери жана бийиктиктердин ортоцентрден баштап чокуларга чейинки кесиндилерин тең экиге бөлүүчү үч чекит бир айланада жатыша тургандыгын далилдегиле. (Мындай айлана *тогуз чекиттин айланасы* деп аталат).

Далилдөө. Берилген ABC үч бурчтугуна сырттан сызылуучу айлананын борборун табуу максатында адегенде үч бурчтуктун үч жагынын тең ортолорунан ал жактарга жүргүзүлгөн перпендикулярлардын кесилишинен O чекитин табабыз. (192-сүрөт). Андан кийин үч бурчтуктун ортоцентрин (бийиктиктеринин кесилишкен чекитин) таап, аны N аркылуу белгилейбиз. Эйлердин түз сызыгы деп аталуучу түз сызык жөнүндөгү жогоруда чыгарылган маселенин чыгарылышында белгиленген сыяктуу эгерде B_1 үч бурчтуктун AC жагынын тең ортосу жана BB_2 — үч бурчтуктун AC жагына түшүрүлгөн бийиктик болсо, анда $B_1O \| NB$ жана $B_1O=\frac{1}{2}NB$ экендигин көрүүгө болот. NB кесиндисинин тең ортосун B_3 деп белгилейли, анда $OB_1=NB_3$ болот.

Ошентип, $OB_1 \| NB_3$ жана $OB_1=NB_3$ болгондуктан OB_1NB_3 төрт бурчтугу параллелограмм болот, демек, эгерде анын диагоналдарынын кесилишкен чекитин O_1 деп белгилей турган болсок, анда $B_3O_1=B_1O_1$ жана $NO_1=O_1O$ болот. $OB_1 \| B_2N$ болгондуктан B_2NOB_1 төрт бурчтугу трапеция болот. Демек $O_1D \perp AC$ жана $NO_1=O_1O$ болгондуктан O_1D — трапециянын орто сызыгы болот,



192-сүрөт.



193-сүрөт.

башкача айтканда $B_2D=DB_1$. Ошентип, катеттери барабар болушкандыктан $\Delta B_2O_1D=\Delta B_1O_1D$,мындан $O_1B_1=O_1B_2$ экендиги келип чыгат. $B_3O_1=O_1B_1$ экендиги мурда көрсөтүлгөн. Демек $B_3O_1=O_1B_1=O_1B_2$, башкача айтканда B_1, B_2 жана B_3 чекиттеринин ар бири (үч бурчтуктун жагынын тең ортосу, бийиктигинин негизи жана ортоцентрден чокуга чейинки бийиктиктин кесиндисинин тең ортосу) O_1 чекиттен бирдей алыстыкта турушат. Ошондуктан O_1 борборунан B_1, B_2, B_3 чекиттери аркылуу айлана жүргүзүүгө болот. Калган алты чекиттин (A_1, A_2, A_3, C_1, C_2, C_3) ар бири дал ушул айланада жата тургандыгын ушундай жол менен далилдөөгө болот.

Эскертүү: ONB үч бурчтугунда $NO_1=O_1O$ жана $NB_3=B_3B$ болгондуктан O_1B_3 кесиндиси ушул үч бурчтуктун орто сызыгы болот, демек $O_1B_3=\frac{1}{2}OB$, башкача айтканда тогуз чекиттин айланасы деп аталуучу айлананын радиусу (O_1B_3) берилген үч бурчтукка сырттан сызылуучу айлананын радиусунун (O_1B) жарымына барабар.

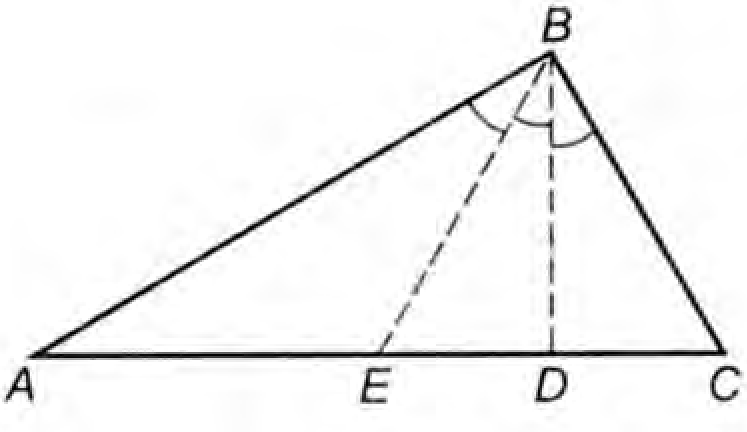
16. Тар бурчу 15° болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттеринин көбөйтүндүсү анын гипотенузасынын жарымынын квадратына барабар экендигин далилдегиле.

Далилдөө. Катеттери a жана b, гипотенузасы c болгон ABC тик бурчтуу үч бурчтугун алып (193-сүрөт), мында $ab=(\frac{c}{2})^2$ экендигин далилдөө үчүн бул үч бурчтукту өзүнө барабар болгон A_1BC үч бурчтугу менен кошумчалап A_1BA тең капталдуу үч бурчтугуна ээ болобуз. Мында $\angle A_1BA=30°$, анткени $\angle CBA=15°$. экендиги берилген. Тең капталдуу үч бурчтуктун каптал жагына AD бийиктигин түшүрүп $S_{A_1BA}=\frac{1}{2}A_1B\cdot AD=\frac{1}{2}c\cdot\frac{c}{2}=\frac{c^2}{4}$ экендигине ээ болобуз, анткени $A_1B=c$, $AD=\frac{c}{2}$. Экинчи жактан алганда ушул эле үч бурчтуктун аянты $S_{A_1BA}=\frac{1}{2}A_1A\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 2b\cdot a=ab$. Мына ошентип, $ab=\frac{c^2}{4}$ экендиги келип чыгат.

17. Эгерде үч бурчтуктун бир чокусунан жүргүзүлгөн медианасы менен бийиктиги, анын ошол чокудагы бурчун үч барабар бөлүккө бөлө турган болсо, анда ал тик бурчтуу үч бурчтук боло тургандыгын далилдегиле.

Далилдөө. ABC үч бурчтугунун AC жагына BE медианасын ($AE=EC$) жана BD ,бийиктигин ($BD\perp AC$) жүргүзөбүз (194-сүрөт).

Маселенин шарты боюнча $\angle ABE=\angle EBD=\angle DBC$. EBC үч бурчтугунда BD — бийиктик да жана биссектрисасы да болуп жаткан-



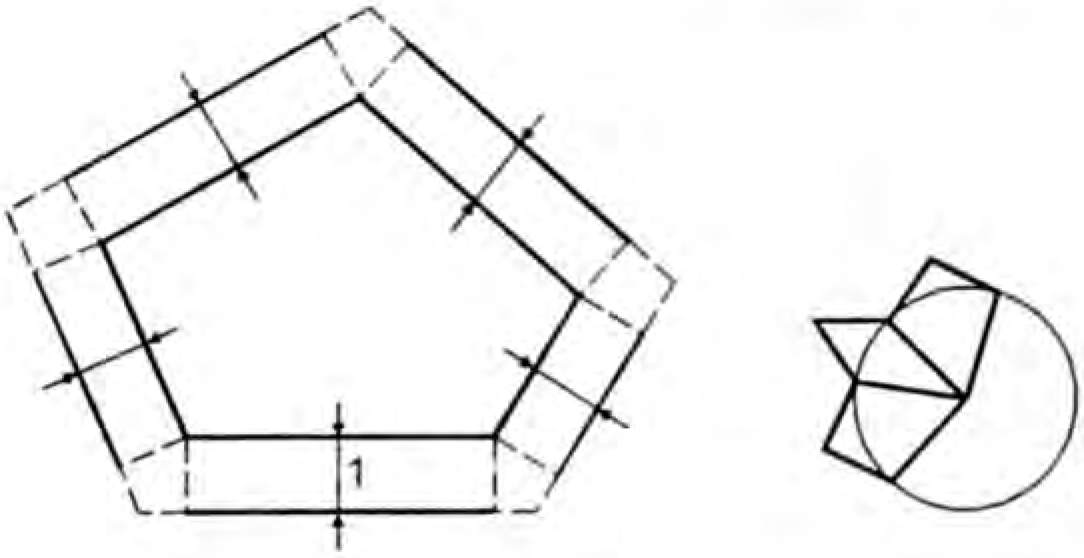
194-сүрөт.

дыктан тик бурчтуу үч бурчтуктардын барабардыгынан $ED=DC$ экендиги келип чыгат. $AE=EC=$ $=2ED=2DC$. ABD үч бурчтугунун BE биссектрисасынын касиети боюнча $AB:BD=AE:ED=2ED:ED=$ $=2:1=2$. Демек, $AB=2BD$. ABD үч бурчтугу тик бурчтуу жана $AB=2BD$, демек $\angle BAD=30°$ жана $\angle ABD=60°$. BE кесиндиси ABD бурчунун биссектрисасы боло тургандыктан $\angle ABE=\angle EBD=30°$, демек $\angle DBC=30°$, башкача айтканда $\angle ABC=$ $=90°$ болот.

18. Периметри 12 бирдикке барабар болгон томпок көп бурчтуктун бардык жактары өз өзүнө параллель бойдон көп бурчтуктун сыртын көздөй бир бирдикке жылдырылат. Бул учурда көп бурчтуктун аянты эң keминде 15 бирдикке чоңоё тургандыгын далилдегиле.

Далилдөө. Берилген көп бурчтуктун сыртын көздөй анын жактарынын ар бирин өз өзүнө параллель кылып жылдыралы, мында жактары ички жана тышкы окшош эки беш бурчтуктун жактары менен чектелген шакекче пайда болот (195-сүрөт).

Мына ушул шакекченин аянты 15 бирдиктен кем болбой тургандыгын далилдөөгө тийишпиз. Бул шакекченин аянты бийиктиги 1ге барабар болгон негиздеринин жалпы узундугу 12 болгон тик бурчтуктардын аянттарынын суммасынан (демек 12 бирдиктен) жана көп бурчтуктун бурчтарындагы кичинекей төрт бурчтуктардын аянттарынын суммасынан турат. Бул кичинекей төрт бурчтуктардын бардыгын жалпы бир чокуга O чекитинин айланасына бириктире жылдырсак, алар өз ара кандайдыр бир көп бурчтукту түзүшөт. Бул көп бурчтуктун аянты



195-сүрөт.

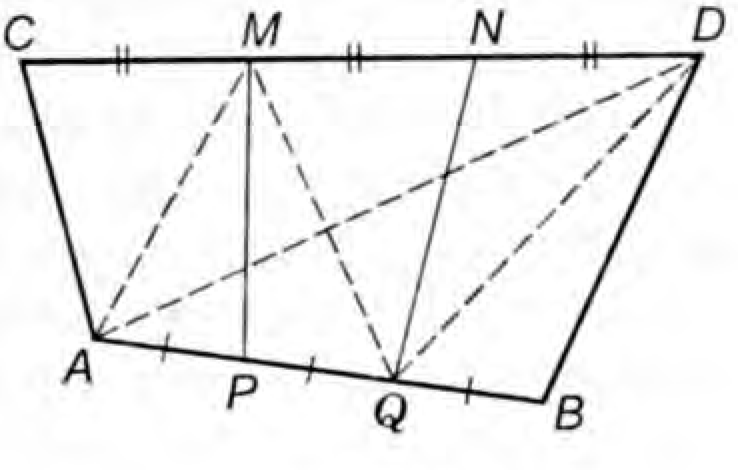
O борборунан жүргүзүлүүчү радиусу 1 болгон тегеректин аянтынан чоң. Радиусу 1 болгон тегеректин аянты $\pi r^2=\pi=3,14$.

Демек, шакектин аянты $12+3,14=15,14$. 15 бирдиктен чоң, башкача айтканда периметри 12 болгон томпок көп бурчтуктун жактарынын ар бирин өз өзүнө параллель кылып көп бурчтуктун сыртын көздөй жылдырганда анын аянты эң кеминде 15 бирдикке чоңоет.

19. $ABCD$ томпок төрт бурчтугунун AB жана CD жактарынын ар бири үч барабар бөлүккө бөлүнгөн (196-сүрөт).

$CM=MN=ND$, $AP=PQ=QB$. $MNPQ$ төрт бурчтугунун аянты $ABDC$ төрт бурчтугунун аянтынын $\frac{1}{3}$ бөлүгүн түзө тургандыгын далилдегиле.

Далилдөө. Чокулары жалпы, бирок биринин негизи экинчисинин негизинен үч эсе кичине болгондуктан:



196-сүрөт.

$$S_{ACM}=\frac{1}{3}S_{ACD} \text{ жана } S_{BQD}=\frac{1}{3}S_{ABD},$$

$$S_{ABDC}=S_{ABD}+S_{ACD},$$

демек

$$S_{ADQ}=\frac{2}{3}S_{BDA};\ S_{AMD}=\frac{2}{3}S_{ACD}.$$

Бул акыркы эки барабардыкты мүчөлөп кошсок:

$$S_{ADQ}+S_{AMD}=\frac{2}{3}(S_{DBA}+S_{ACD}).$$

$$S_{AMD}=\frac{2}{3}S_{ABDC},$$

$$S_{PMQ}=\frac{1}{2}S_{AMQ},\ S_{MQN}=\frac{1}{2}S_{MQD}.$$

Бул акыркы эки барабардыкты мүчөлөп кошсок

$$S_{PMQ}+S_{MQN}=S_{MNPQ}$$

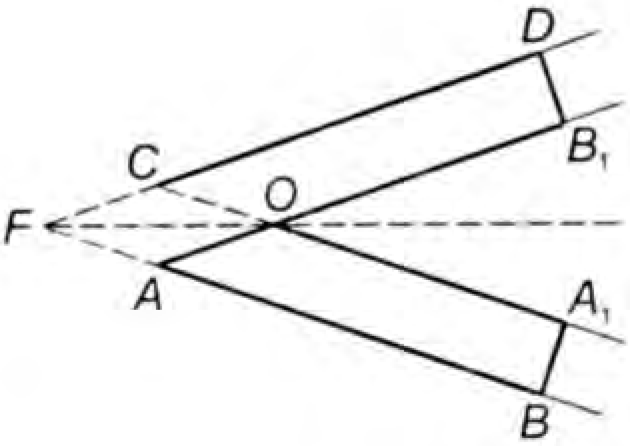
жана

$$\frac{1}{2}S_{AMQ}+\frac{1}{2}S_{MQD}=\frac{1}{2}(S_{AMQ}+S_{MQD})=\frac{1}{2}S_{AMDQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}S_{ABDC}=\frac{1}{3}S_{ABDC}$$

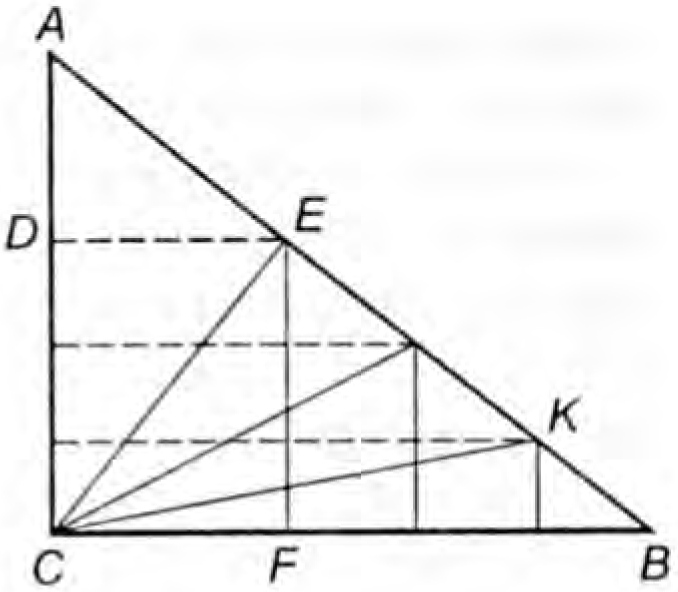
боло тургандыктан, $S_{MNQP}=\frac{1}{3}S_{ABDC}$ экендиги келип чыгат.

20. Чокусу барак кагаздын сыртында жаткан бурчтун биссектрисасын жүзгүзгүлө.

Чыгаруу. Маселени чыгаруу үчүн бурчтун AB жагынын каалаган чекитинен анын CD жагына параллель кылып AB_1 түз сызыгын жүргүзөбүз (197-сүрөт). CD жагынын каалаган D чеки-



197-сүрөт.



198-сүрөт.

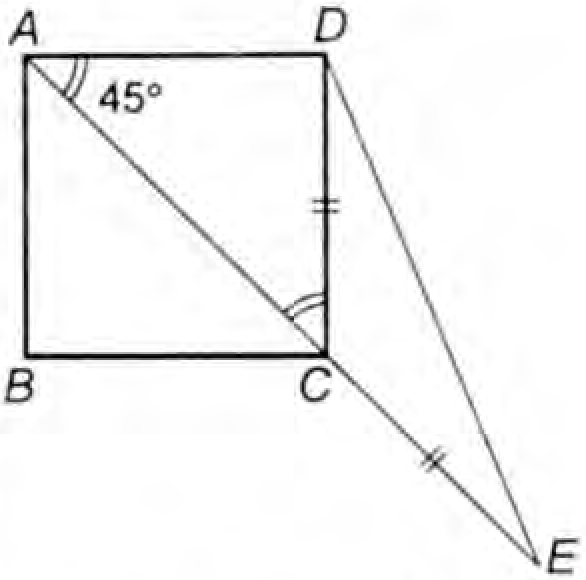
тинен AB_1 ге перпендикуляр кылып DB_1 кесиндисин жүргүзөбүз. AB жагынын каалаган B чекитинен AB га перпендикулярдуу болгон $BA_1=DB_1$ кесиндисин ченеп коебуз да A_1 чекити аркылуу A_1B га перпендикулярдуу болгон түз сызык жүргүзөбүз, ал перпендикулярдуу түз сызыктын AB_1 менен кесилишинен пайда болгон O бурчунун биссектрисасы берилген бурчтун да биссектрисасы болот, анткени $COAE$ төрт бурчтугу ромб болуп эсептелет.

21. Берилген тик бурчтуу үч бурчтукка чокусу тик бурчтуу үч бурчтуктун тик бурчу менен дал келгидей кылып диагоналы эң кичине болгон тик бурчтукту ичтен кандайча сызууга болот?

Чыгаруу. Тик бурчтуу ABC үч бурчтугуна бир нече тик бурчтуктарды ичтен сызалы (198-сүрөт). Бул тик бурчтуктардын ичинен бизге диагоналы эң кыскасы керек. C чокусунан жүргүзүлүүчү мындай тик бурчтуктардын диагоналдары AB гипотенузасына жүргүзүлүүчү кесиндилер болот. Албетте, мындай кесиндилердин эң кыскасы C чокусунан AB га түшүрүлгөн перпендикуляр болуп эсептелет. Ошондуктан изделүүчү тик бурчтукту ичтен сызуу үчүн адегенде $CE\perp AB$ ны жүргүзүп, E чекити аркылуу үч бурчтуктун катеттерине параллель түз сызыктар жүргүзөбүз. Мына ошондон пайда болгон $DEFC$ изделүүчү тик бурчтук болот, анткени анын диагоналы CE (перпендикуляр) башка ар кандай тик бурчтуктун диагоналынан (жантык сызыктан) кыска.

22. Диагоналы менен жагынын суммасы боюнча квадрат түзгүлө.

Чыгаруу. Маселе чыгарылды деп эсептейли, башкача айтканда изделүүчү квадрат $ABCD$ болсун дейли (199-сүрөт). AC диагоналынын уландысына квадраттын жагын ченеп коебуз ($CE=CD$) да, пайда болгон E чекитти D чокусу менен туташты-



199-сүрөт.

рабыз. CDE — тең капталдуу үч бурчтугунун тышкы бурчу $ACD=45°$ болгондуктан, анын негизиндеги бурчтарынын ар бири $\angle DEC=\angle EDC=22°30'$ болот. Мында $AE=AC+CD$. Ошентип, берилген маселени чыгаруунун төмөнкүдөй планын түзүүгө мүмкүндүк алабыз.

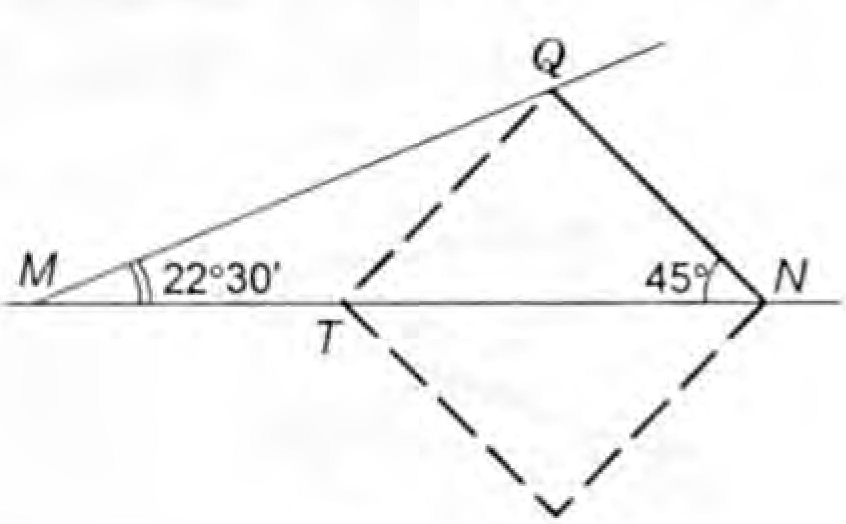
Эркибизче алынган түз сызыктын үстүнө изделүүчү квадраттын диагоналы менен жагынын суммасына барабар болгон кесиндини ченеп коюп, дал ошол кесиндиге жанаша жаткан бурчтарынын бири $22°30'$, экинчиси $45°$ болгудай MNQ үч бурчтугун түзөбүз ($199^{а}$-сүрөт)). Мына ушул үч бурчтуктун $22°30'$ тук бурчуна карама-каршы жаткан QN жагы изделүүчү квадраттын жагы болуп эсептелет. Же болбосо Q чекитинен NQ га перпендикулярдуу кылып QT ны жүргүзөбүз. Пайда болгон QTN тик бурчтуу үч бурчтугун квадратка толуктап, изделүүчү квадратка ээ болобуз.

23. C чокусу чиймеге батпай калган ABC үч бурчтугунун A жана B чокуларынын медианаларын жүргүзгүлө (200-сүрөт).

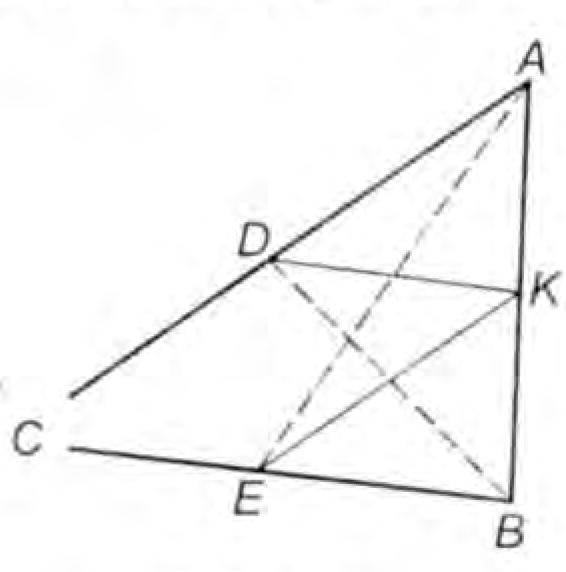
Чыгаруу. AB жагын K чекитинде тең экиге бөлөбүз ($AK=KB$), K чекити аркылуу BC жагына параллель кылып KD түз сызыгын, AC жагына параллель кылып KE түз сызыгын жүргүзөбүз. Мында D жана E чекиттери үч бурчтуктун AC жана BC жактарынын тең ортолору болушат. Демек AE жана BD үч бурчтуктун медианалары болушат.

24. Берилген ABC үч бурчтугуна ABC бурчу жалпы болгудай кылып ромбду ичтен сызгыла (201-сүрөт).

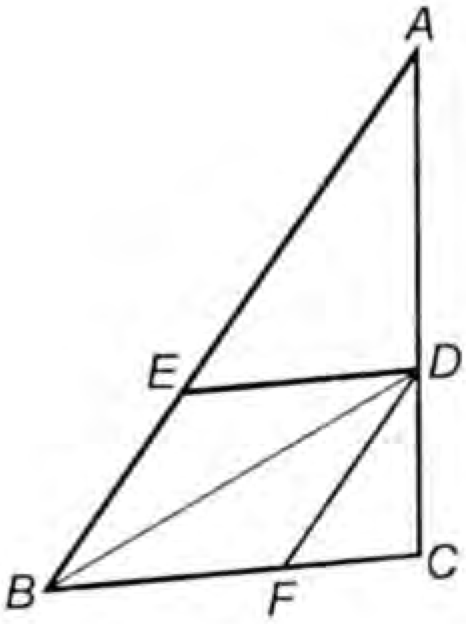
Чыгаруу. ABC бурчунун BD биссектрисасын жүргүзөбүз да, D чекити аркылуу BC га параллель болгон DE ни, AB га параллель болгон DF ти жүргүзөбүз. Натыйжада изделүүчү $DEBF$ ромбуна ээ болобуз, анткени түзүү боюнча бул төрт бурчтук па-



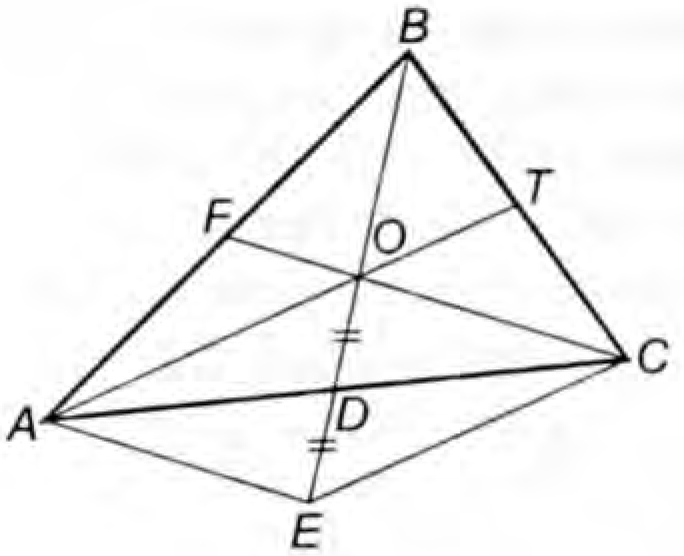
$199^{а}$-сүрөт.



200-сүрөт.



201-сүрөт.

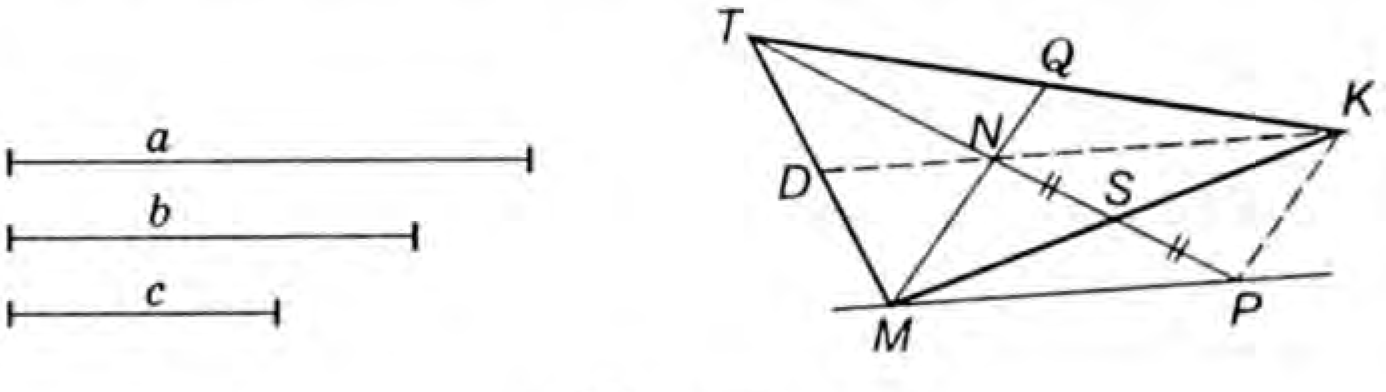


202-сүрөт.

раллелограмм жана анын диагоналы карама-каршы бурчтарынын биссектрисасы болуп эсептелет.

25. Үч медианасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

Чыгаруу. Маселени чыгаруу үчүн адегенде анын шартын төмөндөгүчө талдап көрөлү. Үч бурчтук түзүлдү дейли, ал ABC болсун (202-сүрөт). Бул үч бурчтуктун медианаларынын бирөөнү, мисалы, BD ны анын узундугунун $\frac{1}{3}$ ине созобуз да, пайда болгон E чекитин A жана C чокулары менен кесиндилер аркылуу бириктиребиз. $AD=DC$ жана $OD=DE$ болгондуктан $AOCE$ төрт бурчтугу диагоналдары кесилишкен чекитинде тең экиге бөлүнүүчү төрт бурчтук, башкача айтканда, параллелограмм болот. Ошондуктан $AE=OC=\frac{2}{3}CF$ болот. AOE үч бурчтугунун ар бир жагы изделүүчү үч бурчтуктун медианаларынын бирөөнүн $\frac{2}{3}$ бөлүгүнө барабар экендиги көрүнүп турат. Мындан төмөндөгүдөй түзүү келип чыгат. Мисалы, бизге үч бурчтуктун үч медианасы (a, b, c — кесиндилери) берилди дейли (202^{а}-сүрөт). Жактары дал ушул медианалардын $\frac{2}{3}$ ден бөлүктөрүнө барабар болуучу MNP үч бурчтугун анын үч жагы боюнча түзөбүз: $MP=\frac{2}{3}a$, $MN=\frac{2}{3}c$, $PN=\frac{2}{3}b$, MN кесиндисин $NQ=\frac{1}{3}c$ кесиндисине созобуз. PN кесиндисин S чекитинде тең экиге бөлүп, S



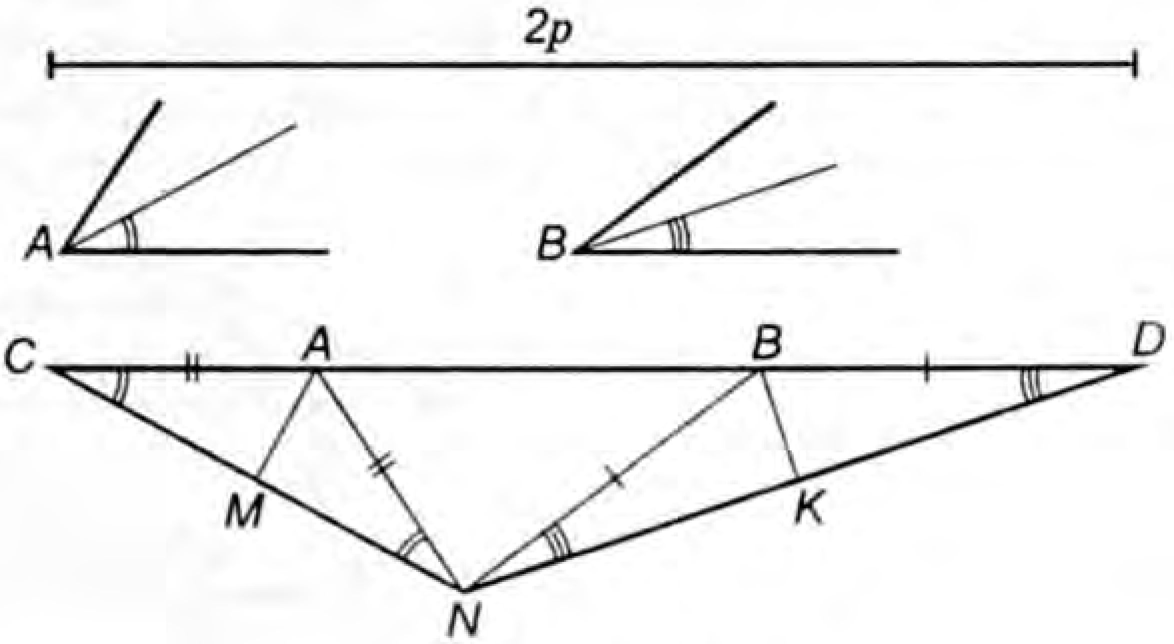
202^{а}-сүрөт.

чекитинен $ST=b$ кесиндисин PN дин багыты боюнча ченеп коебуз. T жана Q чекиттери аркылуу түз сызык жүргүзүп, анын үстүнө $QK=TQ$ кесиндисин ченеп коебуз. M чекитин T жана K чекиттери менен кесиндилер аркылуу бириктирип, натыйжада изделүүчү MTK үч бурчтукка ээ болобуз. Чындыгында эле: түзүү боюнча бул үч бурчтуктун бир медианасы $ST=b$, экинчи медианасы $MQ=MN+NQ=\frac{2}{3}c+\frac{1}{3}c=c$ үчүнчү медианасы $KD=KN+ND=$ $=MP+ND=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}a=a$.

26. Берилген периметри жана негизиндеги эки бурчу боюнча үч бурчтук түзгүлө.

Чыгаруу. Маселенин шартын кыскача анализдеп чыгуу максатында адегенде бул маселени чыгарылды, башкача айтканда, үч бурчтук түзүлдү деп болжолдойлу. Эгерде ал үч бурчтуктун негизин анын каптал жактарына барабар болгон кесиндилерге эки жагын көздөй созо турган болсок жана келип чыккан чекиттерди берилген үч бурчтуктун чокусу менен туташтыра турган болсок, анда берилген маселенин чыгарылышы негизи изделүүчү үч бурчтуктун периметрине, ал эми негизиндеги бурчтары болсо ошол эле изделүүчү үч бурчтуктун негизиндеги бурчтардын жарымдарына барабар болуучу CDN үч бурчтугун түзүүгө келтирилет (203-сүрөт), анткени $CA+AB+BD=2p$, $AC=AN$, $BN=BD$. $\angle ACN=\angle ANC=\frac{1}{2}\angle BAN=\frac{1}{2}\angle A$

$\angle BND=\angle BDN=\frac{1}{2}\angle ABN=\frac{1}{2}\angle B$. $CM=MN$, $NK=KD$ болгондуктан берилген маселени чыгаруунун төмөнкүдөй планын белгилөөгө болот. Берилген негизи ($2p$) жана ошол негизиндеги бурчтары ($\frac{1}{2}\angle A$ жана $\frac{1}{2}\angle B$) боюнча үч бурчтук түзөбүз (CDN). Ал үч бурчтуктун каптал жактарынын тең ортолорунан аларга перпендикулярлар тургузабыз. Ошол перпендикулярлардын үч бурч-



203-сүрөт.

туктун негизи (CD) менен кесилишкен чекиттери изделүүчү үч бурчтуктун калган эки чокусун (A жана B чокуларын) беришет.

27. Диагоналы менен негизинин арасындагы бурчу жана диагоналдарынын суммасы боюнча ромб түзгүлө.

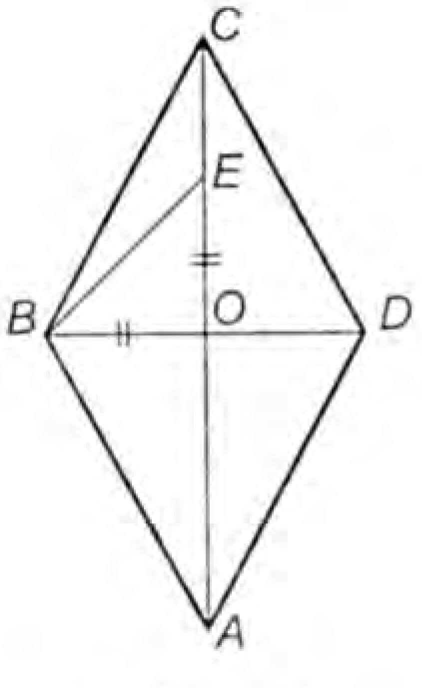
Чыгаруу. Маселенин шартын төмөндөгүчө анализдейбиз. Изделүүчү ромб $ABCD$ болсун дейли (204-сүрөт), анда $AC+BD=a$, $\angle BAC=\alpha$ болсун. O чекитинен баштап OC нын үстүнө OB кесиндисин ченеп коебуз, анда

$$AE=AO+OE=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}(AC+BD)=\frac{1}{2}a;\ \angle BEO=45^\circ$$

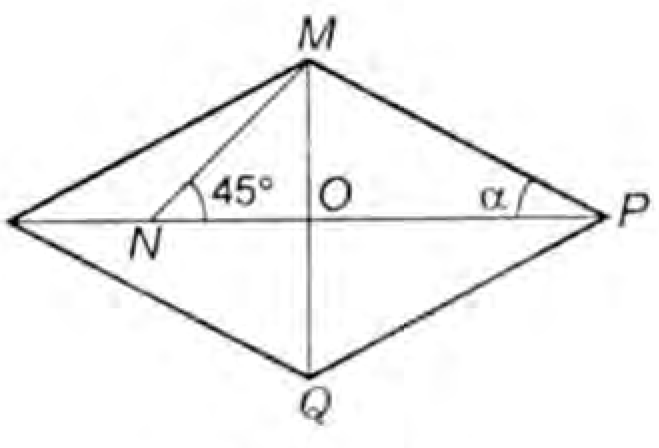
болот.

Демек, BAE үч бурчтугунун AE негизи берилген кесиндинин жарымына барабар, негизиндеги бир бурчу 45°, экинчи бурчу болсо берилген α бурчуна барабар, BO болсо ошол негизге түшүрүлгөн үч бурчтуктун бийиктиги, ал ромбдун кыска диагоналынын жарымын түзөт. Ошондуктан изделүүчү ромбду түзүү үчүн адегенде негизи берилген кесиндинин жарымына (изделүүчү ромбдун диагоналдарынын жарым суммасына) барабар болгон, негизиндеги бурчтарынын бири 45°, экинчиси берилген бурчуна барабар болгон кандайдыр бир MNP үч бурчтугун түзөбүз (205-сүрөт).

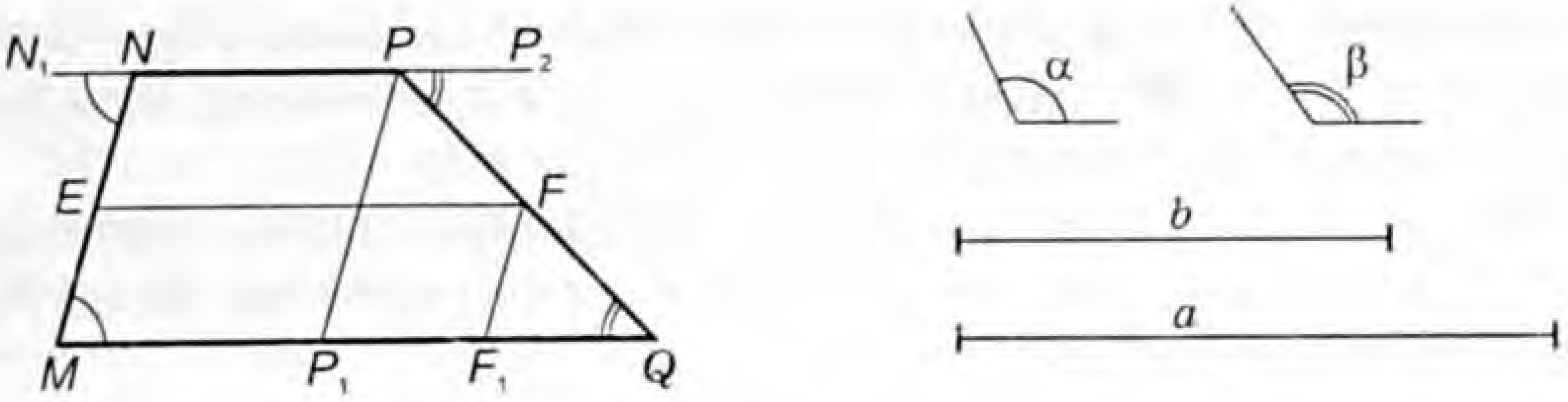
Мында анын негизи $NP=\frac{1}{2}a$; негизиндеги $\angle MNP=45^\circ$, $\angle NPM=\alpha$. M чокусунан NP негизине бийиктик түшүрөбүз, анын негизи O изделүүчү ромбдун борбору болот. OM болсо ошол ромбдун диагоналынын жарымы болот. MO ну O чекитинен ары көздөй өзүнүн узундугунча созобуз да пайда болгон Q чекитин P чокусу менен бириктиребиз. MPQ үч бурчтугун MQ га салыштырмалуу симметриялуу түрдө ромбго толуктайбыз.



204-сүрөт.



205-сүрөт.



206-сүрөт.

28. Берилген чоң негизи, орто сызыгы жана кичине негизиндеги бурчтары боюнча трапеция түзгүлө.

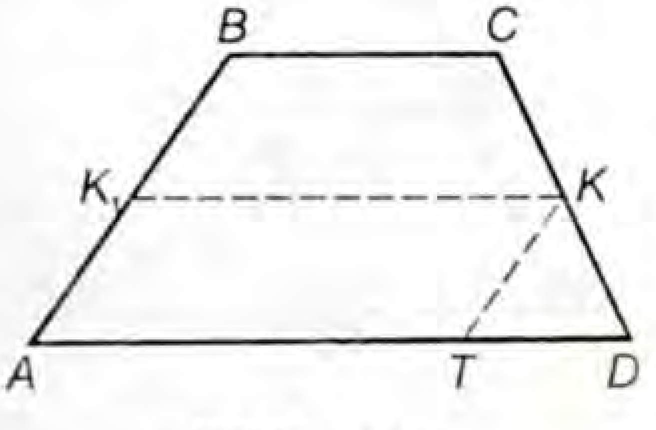
Чыгаруу. Изделүүчү трапеция $MNPQ$ болсун дейли (206-сүрөт), анда анын $MQ=a$ негизи, $EF=b$ ортосызыгы жана $\angle MNP=\alpha$, $\angle NPQ=\beta$ бурчтары белгилүү болот. $\angle N^1NM=\angle NMQ==180°-\alpha$, $\angle P_2PQ=\angle PQM=180°-\beta$; FF_1Q үч бурчтугунда $F_1Q=MQ--EF=a-b$, $\angle FF_1Q=180°-\alpha$, $\angle FQF_1=180°-\beta$. Мына ушундан түзүүнүн төмөндөгүдөй планы келип чыгат.

Адегенде DKT үч бурчтугун курабыз ($TD=a-b$, $\angle T=180°-\alpha$. $\angle D=180°-\beta$).

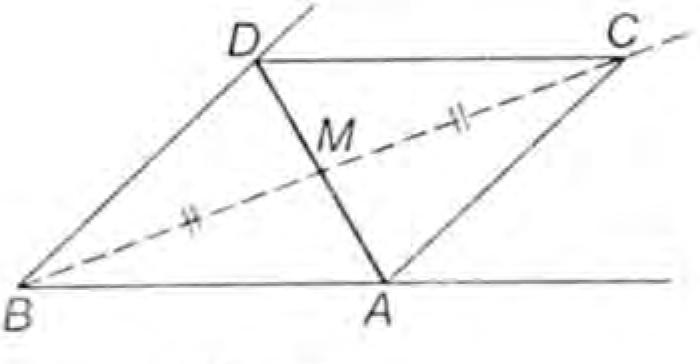
D чекитинен баштап T ны көздөй DT нын үстүнө $DA=a$ ны ченеп коёбуз да A чекити аркылуу TK га параллель болгон AB ны жүргүзөбүз. DK жагынын уландысына $KC=KD$ кесиндисин ченеп коёбуз (206ª-сүрөт). C чекити аркылуу DA га параллель түз сызык жүргүзөбүз, ал AB менен B чекитинде кесилишет, натыйжада $ABCD$ трапециясы келип чыгат. Мунун өзү изделүүчү трапеция болот, анткени түзүү боюнча анын чоң негизи $DA=a$, орто сызыгы $KK_1=b$, $\angle B=\alpha$, $\angle C=\beta$.

29. Кандайдыр бурчтун ичинен M чекити берилген. Бурчтун жактарынын арасындагы кесинди M чекитинде тең экиге бөлүнгөндөй кылып M чекити аркылуу түз сызык жүргүзгүлө.

Чыгаруу. Берилген B бурчунун ичинен каалаган M чекитин алып аны бурчтун чокусу менен түз сызык аркылуу бириктиребиз (207-сүрөт). BM түз сызыгынын үстүнө M чекитинен баштап $MC=MB$ кесиндисин ченеп коебуз. C чекити аркы-



206ª-сүрөт.



207-сүрөт.

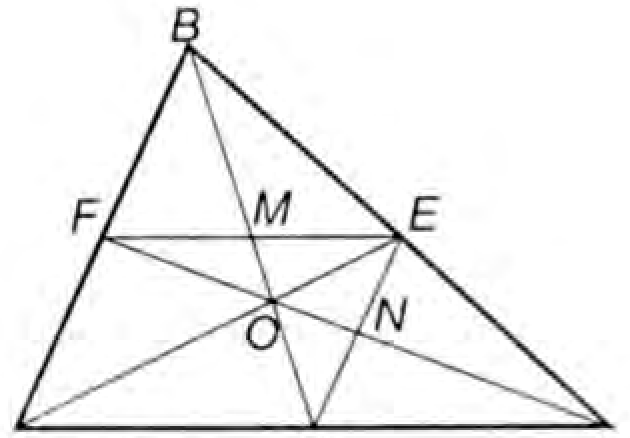
луу бурчтун жактарына параллель түз сызыктар жүргүзөбүз. Пайда болгон $ACDB$ параллелограммдын AD диагоналы изделүүчү түз сызыктын кесиндиси болот, анткени $DM=MA$.

30. Берилген оордук борбору (медианаларынын кесилишкен чекити) жана эки орто сызыгынын тең ортоңку чекиттери боюнча үч бурчтук түзгүлө.

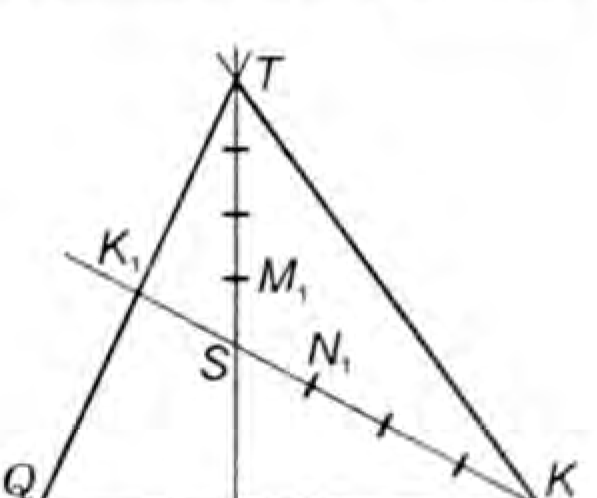
Чыгаруу. Маселе чыгарылды, анын шартын канааттандыруучу үч бурчтук ABC болсун дейли (208-сүрөт). Үч бурчтуктун оордук борбору анын медианасын 1:2 катышында бөлө тургандыктан, мисалы, $OD:OB=1:2$ болот. Үч бурчтуктун орто сызыгы болсо медиананы тең экиге бөлөт (буга үч бурчтуктун орто сызыктарынын жардамы менен түзүлгөн $AFED$ жана $ECDF$ параллелограммдарынан жеңил эле ишенүүгө болот), ошондуктан $BM=MD$ жана $FN=NC$ болот. $BM=\frac{1}{2}BD$, $OD=\frac{1}{3}BD$ болгондуктан, $OM=MD-OD=\frac{1}{2}BD-\frac{1}{3}BD=\frac{1}{6}BD$, демек OM кесиндиси BD кесиндисинин $\frac{1}{6}$ бөлүгүн, BMдин $\frac{1}{3}$ бөлүгүн, OD нын $\frac{1}{2}$ бөлүгүн түзөт.

Ушул эле сыяктуу ON кесиндиси да FC медианасынын $\frac{1}{6}$ бөлүгүн, NC тин $\frac{1}{3}$ бөлүгүн жана OF тин $\frac{1}{2}$ бөлүгүн түзө тургандыгын көрүүгө болот. Мындан тышкары, ар кандай үч бурчтукта анын оордук борбору жана эки орто сызыгынын тең ортоңку чекиттери бир түз сызыкта жатышпай тургандыгын көрөбүз. Мына ушул айтылгандардын негизинде маселени чыгаруунун төмөнкүдөй планын белгилөөгө болот.

Бир түз сызыкта жатпаган каалаган үч чекит алабыз, алардын бири (S чекити) изделүүчү үч бурчтуктун оордук борбору; калган экөө (M_1 менен N_1) ошол эле үч бурчтуктун орто сызыктарынын тең ортолору болушсун (209-сүрөт). M_1 жана S чекиттери аркылуу түз сызыктын үстүнө M_1 ден баштап SM_1 багыты



208-сүрөт.



209-сүрөт.

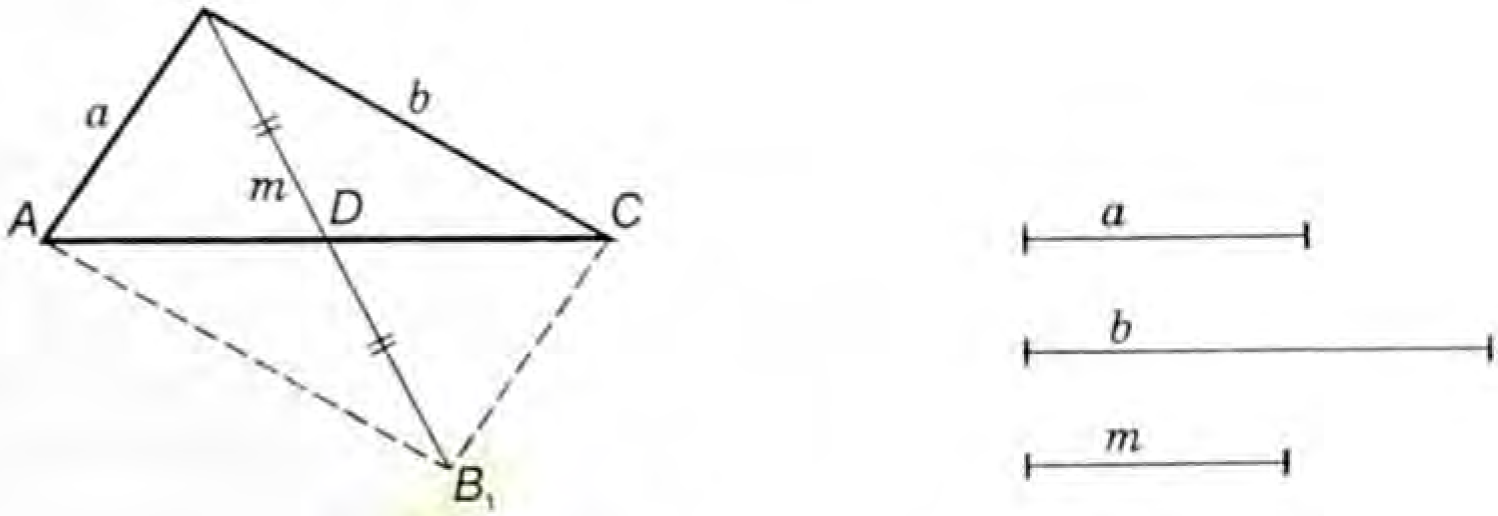
боюнча $M_1T=3SM_1$ кесиндисин ченеп коёбуз. M_1 ден баштап M_1S багыты боюнча $M_1T_1=M_1T$ ны ченеп коёбуз.

Ошол эле сыяктуу S жана N_1 чекиттери аркылуу түз сызык жүргүзүп, анын үстүнө SN_1 багыты боюнча N_1 ден баштап $N_1K_1=3SN_1$, кесиндисин ченеп коюп, андан кийин N_1S багыты боюнча N_1 ден баштап $N_1K_1=N_1K$ кесиндисин ченеп коёбуз. K_1 жана T чекиттери аркылуу түз сызык жүргүзүп анын үстүнө TK_1 боюнча K_1 ден баштап $K_1Q=K_1T$ кесиндисин ченеп коёбуз. Пайда болгон T, K жана Q чекиттери изделүүчү үч бурчтуктун чокулары болушат.

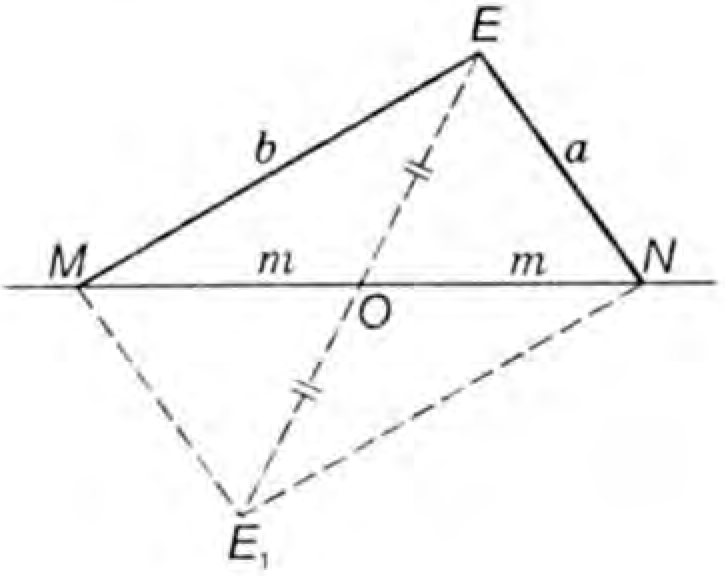
31. Бир чокусунан чыккан эки жагы жана медианасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

Чыгаруу. Изделүүчү үч бурчтук ABC болсун дейли (210-сүрөт), башкача айтканда үч бурчтуктун AB, BC жагы жана BD медианасы берилген кесиндилерге (a, b, m) барабар болушсун. BD медианасын D чекитинен ары созуп, анын үстүнө $DB_1=DB$ кесиндисин ченеп коёбуз. B_1 чекитин A жана C чекиттери менен бириктирип, диагоналдары кесилишкен чекитинде тең бөлүнүүчү $ABCB_1$ ($AD=DC$, анткени BD — медиана, $DB=DB_1$ түзүү боюнча) төрт бурчтугуна ээ болобуз. Демек $ABCB_1$ төрт бурчтугу параллелограмм болот, ошондуктан $AB=CB_1$ экендиги келип чыгат. Ошентип, жактарынын барабардыгы боюнча $\Delta ABB_1=\Delta BB_1C$ болот. Мындан изделүүчү үч бурчтукту түзүүнүн төмөнкүдөй планын белгилөөгө болот. Берилген үч жагы боюнча ABB_1 үч бурчтугуна барабар болгон үч бурчтук түзөбүз.

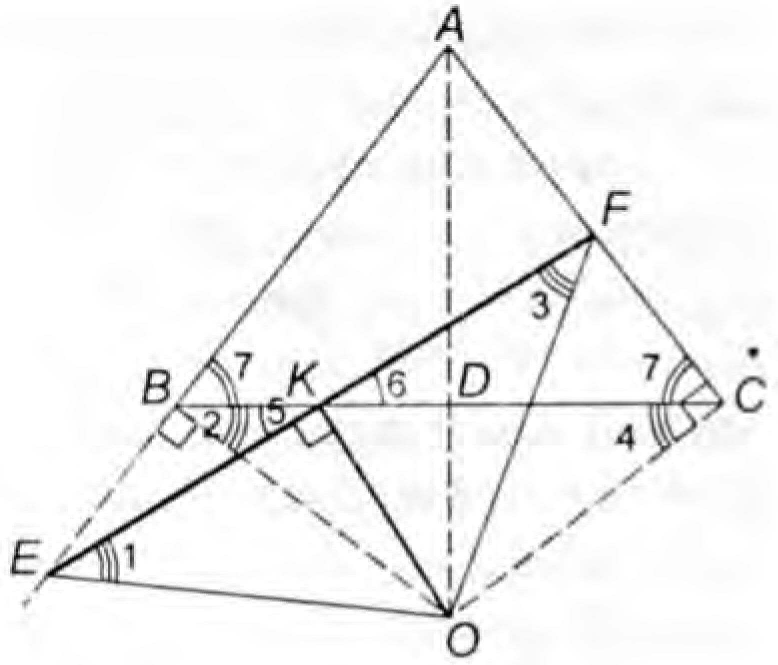
Эркибизче алынган түз сызыкка берилген медианадан эки эсе чоң болгон кесиндини ($MN=2m$) ченеп коёбуз (210^а-сүрөт). M чекитин борбору кылып алып a радиустуу, N чекитин борбор кылып алып b радиустуу айланалар жүргүзүп, алардын кесилишкен чекитин E деп белгилейбиз. E чекити менен MN дин тең ортосу болгон O чекити аркылуу түз сызык жүргүзүп, EO



210-сүрөт.



$210^{\text{а}}$-сүрөт.



211-сүрөт.

нун O дон аркы уландысына $OE_1=OE$ кесиндисин ченеп коёбуз да, $MENE_1$ параллелограммына ээ болобуз. Мындагы MEE_1 же NEE_1 үч бурчтуктарынын каалаганы изделүүчү үч бурчтукту берет.

32. Конструктивдүү маселе. Тең капталдуу ABC үч бурчтугу берилген, анын AB жана AC жактары барабар. Мындан тышкары төмөнкү үч маалымат белгилүү:

1) BC кесиндисинин тең ортоңку чекити D, AD түз сызыгынан OB жана AB түз сызыктары өз ара перпендикулярдуу болгондой O чекити тандалып алынган;

2) BC кесиндисинен эркибизче алынган K чекити B жана C чекиттеринен айырмалуу;

3) E чекити AB түз сызыгында, F чекити AC түз сызыгында жатат, мындагы E, K жана F чекиттери бир түз сызыкта жатышкан ар башка чекиттер.

$KE=KF$ болгондо жана ошол учурда гана OK жана EF түз сызыктары өз ара перпендикулярдуу боло тургандыгын далилдегиле.

Чыгаруу. Маселенин шартына ылайык келе тургандай чиймени чиели (211-сүрөт).

Мында $AB=AC$, $BD=DC$

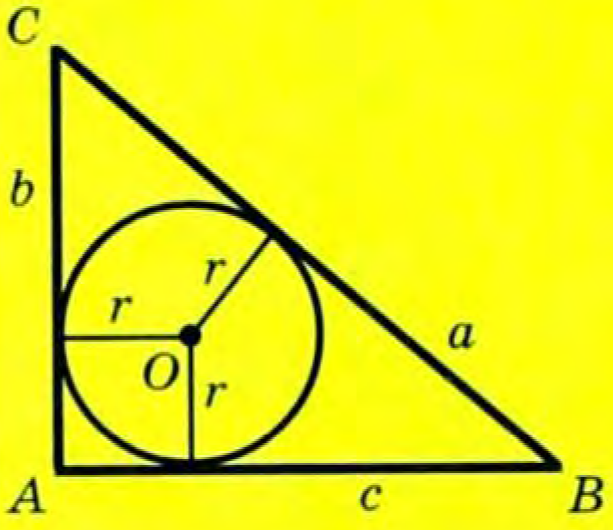
$\angle ABD=\angle ACD=\angle 7$

$OB \perp AB$.

1) $OK \perp EF$ болсун дейли да $EK=KF$ экендигин далилдейбиз. Маселенин шартынан ошондой эле $OC=OB$ жана $OC \perp AC$ экендиги келип чыгат. OKE жана OBE тик бурчтуу үч бурчтуктарын карап көрөлү, OE — алардын жалпы гипотенузасы. Алардын ар бирине диаметри OE болгон сырттан айлана сызууга болот. Демек $OKBE$ төрт бурчтугуна жалпы бир айлананы сырттан сызууга болот, анда $\angle OEK=\angle OBK$; Ошол эле сыяктуу $OCFK$

ТИРКЕМЕ

Үч бурчтук



Белгилөөлөр:

a, b, c — **жактары,**
$\angle A, \angle B, \angle C$ — **бурчтары,**
S — **аянты,**
R — **сыртынан сызылган,**
r — **ичтен сызылган айланалардын радиустары**

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ — **ички бурчтарынын суммасы**

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = 4R \cdot \cos\frac{\angle A}{2} \cdot \cos\frac{\angle B}{2} \cdot \cos\frac{\angle C}{2}$$ — **жарым периметри**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle A$$ — **косинустар теоремасы**

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R$$ — **синустар теоремасы**

$$h_a = b\sin\angle C = c\sin\angle B = \frac{bc}{2R}$$ — a **жагына түшүрүлгөн бийиктиги**

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 + a^2}$$ — a **жагына жүргүзүлгөн медианасы**

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$ — A **бурчунун биссектрисасы**

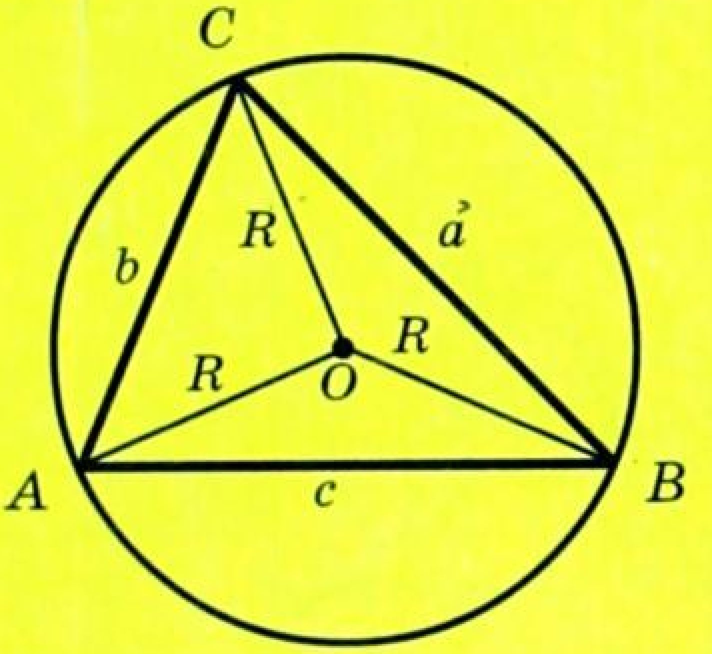
56с 40т

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \angle C = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= 2R^2 \sin \angle A \cdot \sin \angle B \cdot \sin \angle C = \frac{abc}{4R}$$ — **аянты**

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{S}{p} = 4R \sin \frac{\angle A}{2} \cdot \sin \frac{\angle B}{2} \cdot \sin \frac{\angle C}{2}$$ —

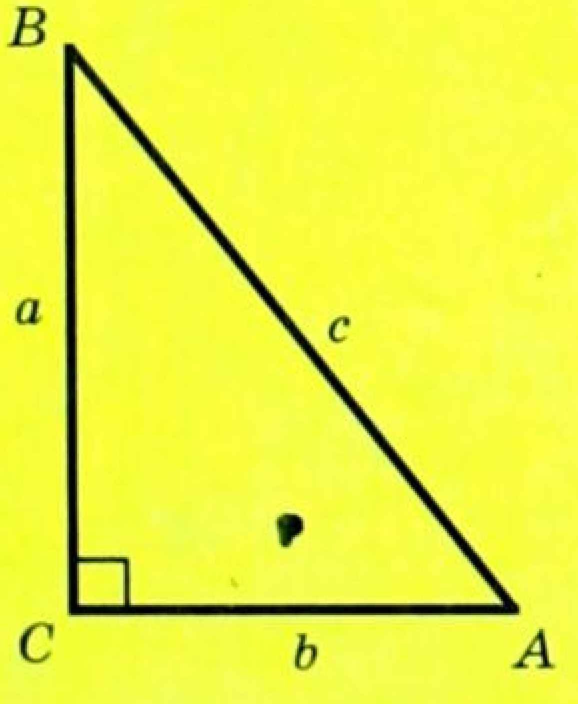
ичтен сызылган айлананын радиусу



$$R = \frac{a}{2 \sin \angle A} = \frac{b}{2 \sin \angle B} = \frac{c}{2 \sin \angle C} =$$

$$= \frac{abc}{4S}$$ — **сырттан сызылган айлананын радиусу**

Тик бурчтуу үч бурчтук



$\angle C = 90°$, a, b — **катеттери,**

c — **гипотенузасы**

$$\frac{a}{c} = \sin \angle A, \quad \frac{b}{c} = \cos \angle A, \quad \frac{a}{b} = tg \angle A.$$

$a^2 + b^2 = c^2$ — **Пифагордун теоремасы.**